Universidade de Lisboa

Ensino e aprendizagem de equações do 1.º grau com contributo da tecnologia

Análise das aprendizagens e das dificuldades de alunos do 7.º ano de escolaridade

Hugo Ricardo Pereira de Almeida

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pelo Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães e coorientado pelo Professor Doutor Pedro Jorge Freitas

2016

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães pela sua atenção, pelo fino recorte das suas observações e pela sua boa disposição.

Ao meu coorientador Professor Doutor Pedro Jorge Freitas pela sua presença, pelos seus comentários e por ser tão acessível.

Ao Professor Paulo Alvega pelo acompanhamento constante, pelas suas sugestões, pelas discussões e pelo exemplo que representa enquanto professor.

Ao meu colega Pedro Mateus pelo apoio que me deu, pela disponibilidade e pelo seu companheirismo.

À Escola Padre Alberto Neto por me ter proporcionado a oportunidade e por dispor de funcionários de grande simpatia.

Aos alunos da turma sobre a qual incidiu o meu estudo por serem crianças divertidas, interessadas e por me terem proporcionado uma grande experiência.

À minha Mãe por ter lutado a meu lado, à minha família por ter torcido por mim, aos meus amigos por estarem presentes e terem tido paciência para a minha ausência e à Andreia e Nélson pelos seus conselhos.

Resumo

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular de Introdução à Prática Profissional IV do Mestrado em Ensino da Matemática. O domínio matemático sobre o qual incidiu foi a Álgebra, em específico debrucei-me sobre as equações do 1.º grau lecionadas no 7.º ano de escolaridade.

As aulas da intervenção que realizei decorreram ao longo de três semanas e nelas foram estudadas as equações do 1.º grau, desde a introdução até ao início da resolução de problemas. Desenvolvi tarefas para os alunos explorarem com os seus pares e discutirem em grupo turma e, em termos de opções metodológicas, a minha intervenção foi caracterizada pela predominância do método exploratório, pela criação de diferentes momentos de aula, pela utilização de materiais diversificados e pela inclusão da utilização da tecnologia em sala de aula. Para concretizar a inclusão da tecnologia nas aulas de matemática, desenvolvi um programa computacional que designei de *Solver,* com o qual os alunos resolveram equações.

A intervenção letiva que realizei integrou uma componente de estudo de cariz investigativo, cujas questões orientadoras foram: que aprendizagens os alunos manifestam no estudo das equações do 1.º grau, que dificuldades revelam e qual o contributo da tecnologia, neste caso do programa computacional *Solver*, para a sua aprendizagem. Ao nível dos resultados obtidos, este estudo mostra que os alunos manifestam aprendizagens ao nível de conceitos como o de incógnita ou de equação, bem como na resolução de equações, nomeadamente na redução de termos semelhantes e na aplicação dos princípios de equivalência, entre outras. Em termos de dificuldades, sobressaíram as dificuldades relacionadas com a interpretação de monómios e com a sua manipulação algébrica. Relativamente à utilização da tecnologia nas aulas de Matemática, este estudo comprova a sua utilidade e a boa aceitação que tem por parte dos alunos.

Palavras-Chave: Álgebra, Equações, Aprendizagem, Dificuldades, Tecnologia.

Abstract

This report was developed in the Course of Introdução à Prática Profissional IV of the Master in Mathematics Teaching. The mathematical domain focused was Algebra, I specifically worked with the 1st degree equations taught in 7th grade.

The math classes of my teaching intervention took place over three weeks, and throughout those, 1st degree equations were studied from the introduction, through the beginning of problem solving. I developed tasks to explore, both within each couple of students and with the whole class as a group. In terms of methodology, my intervention was characterized by the predominance of the exploratory method, by the creation of diverse class stages, by the use of diverse materials and by the inclusion of technology in the classroom. To achieve the latter, I developed a computer program that I named *Solver*, which students used to solve equations.

In my intervention I considered a study component, investigative in nature, which had the following guiding questions: which learnings the students achieve in the study of 1st degree equations, which difficulties they experience, and what was the contribution of technology in their learning. Concerning the results, the study reveals that students show successful mathematical learnings, particularly in the understanding of concepts like the unknown or equation and in the process of solving equations – adding similar terms and applying equivalent principles, among others. The study also shows that some of the hardships that, students experienced are related with the interpretation of terms and also with its algebraic manipulation. Regarding the use of technology in math classes, this study shows its usefulness and good acceptance by the students.

Keywords: Algebra, Equations, Learnings, Difficulties, Technology.

Índice

Índice de figuras

Índice de tabelas

1. Introdução

A Álgebra é um domínio matemático fortemente presente em todos os níveis de ensino da Matemática e, por esse motivo, é um domínio matemático chave no percurso escolar dos alunos assim como o é no desenvolvimento da sua capacidade de generalização: “a generalização está no coração do pensamento algébrico” (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007, p. 12). O meu interesse por este domínio tem a ver com o seu caráter longitudinal e com a possibilidade de perceber de que forma o professor pode exercer uma prática letiva que, permita aos alunos desenvolver aprendizagens significativas no estudo da Álgebra. Na minha experiência pessoal de ensino, dou explicações há 6 anos, deteto inúmeras vezes bloqueios nos alunos em domínios matemáticos como a Trigonometria, a Geometria ou as Funções, que prendem-se, essencialmente, com a falta de compreensão dos fundamentos da Álgebra e dos seus procedimentos. Estas dificuldades têm muitas vezes origem no início do 3.º ciclo, onde os alunos não conseguem desenvolver compreensão e acabam por memorizar, com dificuldade, um conjunto de procedimentos que pouco sentido lhes faz e que frequentemente são confundidos ou esquecidos. Assim, quis aproveitar a oportunidade de aprofundar esta problemática na minha intervenção de três semanas, numa turma de alunos do 7.º ano de escolaridade.

Atualmente, com a disseminação da tecnologia e com o constante estímulo com que os alunos convivem, parece-me que fará sentido conjugar a tecnologia com o ensino da Matemática, isto em ordem a aproximar os “mundos” da Matemática e do estímulo tecnológico. Creio na importância de os alunos sentirem que a Matemática pode ser um “mundo” que, afinal, não está numa “galáxia” assim tão distante e que pode conviver, em termos de ensino, com o quotidiano tecnológico. Importará pois, refletir sobre o contributo que a tecnologia pode ter para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

1.1. Problemática

A intervenção letiva que realizei integrou também a realização de um estudo de cariz investigativo. Com esse estudo, procurei encontrar respostas para as seguintes questões: que aprendizagens os alunos manifestam no estudo das equações do 1.º grau, que dificuldades revelam e qual o contributo da tecnologia, neste caso do programa computacional que designei como *Solver*, para a sua aprendizagem. Estas são as questões orientadoras do meu estudo e terei em conta, em termos de reflexão final, um olhar sobre os desafios que são colocados aos professores, na preparação e acompanhamento das aulas de Matemática que se desenrolam com recurso a ferramentas tecnológicas, isto porque o uso de tecnologias potencia um ambiente de aula com mais movimento, mais ruído, mais sobressaltos e receios para o professor (Amado & Carreira, 2008).

1.2. Estrutura

A estrutura deste trabalho contempla um total de seis seções, seguindo-se as referências bibliográficas e os anexos respetivos. À primeira secção de Introdução segue-se a secção Enquadramento, que diz sobretudo respeito às orientações curriculares e didáticas sobre o ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau, nela incluem-se menções ao uso da tecnologia no ensino e às dificuldades normalmente reveladas pelos alunos na aprendizagem deste conteúdo. A terceira secção do documento é a Unidade de ensino, onde caracterizo a turma em que realizei a minha intervenção letiva, o 7.º C. Também nesta secção, serão apresentados os tópicos abordados no âmbito do estudo das equações, os objetivos de aprendizagem, as linhas estratégicas da minha intervenção e as tarefas que desenvolvi para o efeito. A quarta secção, Métodos e procedimentos de recolha de dados, caracteriza a natureza qualitativa do estudo realizado, sendo igualmente caracterizados e justificados os instrumentos utilizados para a recolha de dados. A quinta secção do documento é constituída pela Análise dos dados recolhidos, seguindo-se a esta a secção referente à Reflexão final, a qual procura sintetizar o estudo realizado e refletir sobre o contributo da experiência de lecionação que tive para a minha formação como professor.

2. Enquadramento

Como referido, o estudo efetuado teve como objetivo analisar as aprendizagens e dificuldades dos alunos, quando é trabalhado o conteúdo das equações algébricas do 1.º grau no 7.º ano de escolaridade. Tendo em conta Programa e Metas de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), o objetivo do ensino da Álgebra é a aquisição de procedimentos próprios da Álgebra, no quadro das propriedades dos monómios e polinómios. Atendendo-se ao Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), constatamos a preocupação com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Claro que, no ensino e aprendizagem da Álgebra, existe um conjunto alargado de técnicas e procedimentos que o aluno deve adquirir, no entanto, esta aquisição deve ser feita com compreensão, a Matemática não se resume à manipulação simbólica segundo determinadas regras e implica a compreensão de padrões (Devlin, 1998).

Sendo o início do estudo das equações do 1.º grau, um momento crucial para que os alunos comecem a desenvolver o seu pensamento algébrico, a utilização da linguagem algébrica e a representação simbólica de situações, isto como primado do estudo de equações, importa que se apropriem de conceitos e procedimentos fundamentais como o conceito de incógnita, a utilização do símbolo igual como símbolo relacional, o significado de equação e os princípios de equivalência. Ora a apropriação destes conhecimentos, bem como a transição da Aritmética para a Álgebra, revestem-se de uma importância substancial nesta fase da aprendizagem dos alunos. A realização de aprendizagens significativas será um bom prenúncio das aprendizagens que os alunos continuarão a realizar, no domínio da Álgebra nos subsequentes anos escolares do 3.º ciclo e do ensino secundário. Considerar a Álgebra como um fio condutor, desde os primeiros anos, ajudará os alunos a adquirirem uma base sólida para um trabalho algébrico baseado na compreensão (Leitão & Cangueiro, s. d.).

2.1. Álgebra

A Álgebra tem evoluído ao longo dos tempos, juntamente com a evolução das civilizações. Na antiguidade, nomeadamente nos povos da Suméria, da Babilónia, do Egipto, da India e da China, encontramos uma fase de desenvolvimento da Álgebra assente na utilização de uma linguagem natural ou retórica, destinada essencialmente à resolução de problemas do quotidiano, como é ilustrado no famoso *papiro de Amhes/Rhind*. Mais tarde, na antiga Grécia, a Álgebra tem um desenvolvimento significativo com os trabalhos de Diofanto de Alexandria, o qual introduz a linguagem sincopada e a utilização de símbolos na Álgebra. Diofanto de

Alexandria nasceu entre 201 e 215 AD (Anno Domini) e é considerado por muitos o pai da Álgebra, sendo os seus trabalhos mais relevantes o *Aritmética* (13 livros), o *Tratado sobre números poligonais* e uma coleção de porismos (proposições). Diofanto foi um algebrista que podemos situar entre o período retórico e o simbólico, verificando-se já nos seus trabalhos algumas abreviaturas e simbolismos, dos quais as potências de uma incógnita são exemplo, representando-se as cinco primeiras potências naturais como se segue: Δ^y; K^y; $\Delta^y\Delta$; ΔK^y; K^yK (Heath, 1910). A palavra Álgebra tem a sua origem nos trabalhos desenvolvidos pelo matemático árabe Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizm, este matemático viveu no século IX e partilha com Diofanto o crédito de cofundador da Álgebra. A designação "Álgebra" é então utilizada para designar a operação de "transposição de termos". Apenas séculos mais tarde, com o matemático francês François Viéte (1540-1603), a Álgebra entra definitivamente na sua fase simbólica, é nos trabalhos deste matemático que são introduzidas vogais para representar quantidades constantes e consoantes para quantidades incógnitas (Fiorentini, Miorim e Miguel,1993).

Reconhece-se que é a utilização da linguagem simbólica que tem permitido grandes desenvolvimentos no domínio da Álgebra. São os símbolos que permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa, tal como referido por Keith Devlin (citado em Ponte, Branco & Matos, 2009, p.8): "sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria".

2.2. O ensino da Álgebra

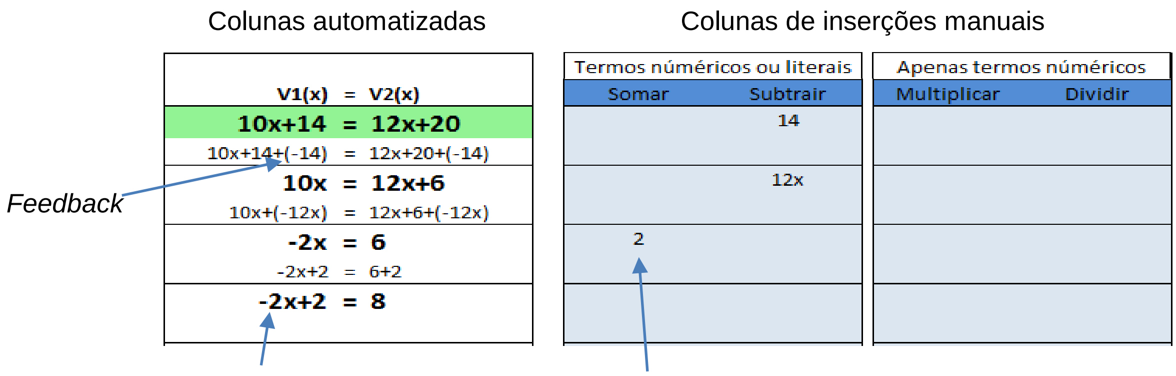
Reconhecendo-se a utilização do símbolo como fundamental no desenvolvimento da Álgebra, e também no seu ensino e aprendizagem, importa ter presente que a grande potencialidade do símbolo é também a sua grande fraqueza (Ponte, Branco & Matos, 2009). Se tomarmos como exemplo a ideia de transpor termos e símbolos de forma abstrata, a mesma pode redundar numa dinâmica de manipulação meramente formal, o professor deverá ter em conta os referenciais concretos e de contexto real, isto para evitar que os alunos "aprendam" sem sentido e que se limitem à memorização e repetição de procedimentos algébricos, para os quais não encontram significado. É neste contexto que surge o interesse pela caracterização do pensamento algébrico, na medida em que é na compreensão que podemos localizar este tipo de pensamento. O pensamento algébrico diz respeito à simbolização, ao estudo das estruturas e à modelação. É fulcral que se conheça, que se compreenda e que se utilizem os instrumentos simbólicos para matematizar situações problemáticas. A fase de aplicação de procedimentos é isso mesmo, uma fase, onde são aplicados procedimentos formais de modo a encontrar um conjunto de resultados (finito, infinito ou vazio) que importa interpretar, analisar criticamente e dar-lhe significado no contexto do problema. Verifico que, no meu percurso como estudante e como explicador, o ensino e aprendizagem da Álgebra, em particular o ensino e aprendizagem das equações, incide essencialmente sobre a aplicação dos princípios de equivalência, ensinando-se o truque de "passa para o outro membro com sinal diferente" ou, " se está a multiplicar passa a dividir e vice-versa". Ora estes truques não são à prova de erro, muitas vezes os alunos, perante a multiplicação da incógnita por um número negativo, aplicam o "passa para o outro lado" e efetuam no outro membro da equação uma divisão por um número positivo, referindo que "se passa para o outro lado troca-se o sinal". Este tipo de procedimento mecanizado e desprovido de significado tolhe o espirito crítico dos alunos, a aderência à realidade e, em consequência, fere de forma significativa o desenvolvimento do pensamento algébrico dos jovens. Em vez de se limitar o ensino e aprendizagem da Álgebra à apreensão de procedimentos que os alunos devem aplicar na resolução das equações, importa que sejam proporcionadas aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal (Ponte et al., 2007). Será desta forma que os alunos poderão começar a desenvolver a sua compreensão da Álgebra. O pensamento algébrico, mais do que manipular expressões e resolver equações, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas (Matos et al., 2008).

O pensamento algébrico diz respeito ao <u>estudo das estruturas</u> - compreender padrões, relações e funções; <u>à simbolização</u> - representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos; <u>à modelação</u> - usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e ao <u>estudo da variação</u> - analisar mudança em diversas situações, (NCTM, 2007). No ensino da Álgebra, o professor não se deve resumir à lógica ao procedimento, pois a Álgebra, não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo. (Fiorentini et all., 2005).

2.3. A tecnologia no processo de ensino e aprendizagem

Vivemos tempos em que a tecnologia, mais do que fazer parte da nossa vida, modifica a forma como vivemos, como comunicamos e como aprendemos. É comum o recurso à tecnologia para contactarmos uns com os outros, podendo observar-se que muitos dos alunos das nossas escolas fazem-se acompanhar de telemóveis, possuem páginas em redes sociais e revelam uma familiaridade com a tecnologia que seria impensável há 20 anos atrás. Com a disseminação da tecnologia são aflorados novos problemas e também novas oportunidades. Em termos de disciplina na sala de aula, a utilização de *gadgets* tem-se revelado um desafio crescente para os professores. Citado no jornal Expresso, a 27 de Setembro de 2013, Paulo Peixoto refere que esta utilização ocorre por vezes em sala de aula, originando uma diminuição dos índices de atenção e concentração por parte dos alunos. No mesmo artigo, Isabel Freire refere que a geração que agora chega ao ensino superior cresceu com as novas tecnologias e redes sociais e é, por isso, uma geração habituada a uma interatividade quase permanente. O ensino necessita tornar-se mais dinâmico, participativo e com uma maior autonomia e responsabilidade dos estudantes. Neste sentido, a integração da tecnologia no ensino em geral e na Matemática em particular, sugere-me que o professor pode aproveitar esta oportunidade para captar a atenção dos alunos e para estimular o seu envolvimento no processo de ensino e aprendizagem. Claro está que a eficácia da utilização da tecnologia, ou a falta dela, depende em muito do papel desempenhado pelo professor (NCTM 2007). Um dos problemas da prática profissional do ensino tem a ver com a desadequação dos programas às reais necessidades dos alunos (Ponte, 2004). O professor tem a possibilidade de pesquisar novas formas de adequar os conteúdos a ensinar ao contexto dos seus públicos-alvo, promovendo um ensino mais atrativo e estimulante. É neste contexto que a utilização das tecnologias em geral, e do computador em particular, posicionam-se como fatores facilitadores da criação de novas dinâmicas de aprendizagem (Ponte & Canavarro, 1997). A utilização monolítica dos tradicionais manuais, caderno e quadro, é uma prática que pode ser descontinuada pelo professor, podendo ser benéfica, para a aprendizagem dos alunos, a utilização dos instrumentos que todos nós possuímos e utilizamos, os das novas tecnologias (Lino, 2009). A utilização dos computadores em sala de aula permite observar um dinamismo que estimula os alunos no sentido de obterem a sua emancipação e espírito de iniciativa (APM, 1988). Os computadores motivam os alunos para a aprendizagem da Matemática, permitem reduzir a ansiedade de cometer erros e a visualização que possibilitam é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos (Amado & Carreira, 2008).

Além dos aspetos motivacionais que são potenciados pela utilização das ferramentas tecnológicas no ensino, estas têm a facilidade de permitir efetuar procedimentos de rotina de forma rápida e precisa, libertando o aluno para o desenvolvimento de conceitos e para a matematização de situações matemáticas (NCTM, 2007). Neste sentido, a proposta da utilização do programa computacional *Solver*, desenvolvido em *Excel* no âmbito da unidade didática de Metodologia do Ensino da Matemática, tem como objetivos: motivar os alunos para a aprendizagem da Matemática; realizar de forma automatizada os processos de redução de termos semelhantes, o que irá reforçar a noção de adição de termos semelhantes; fornecer *feedback* aos alunos ao nível dos princípios de equivalência; e desenvolver conceitos como o símbolo de igual como sinal relacional, o que será uma novidade para os alunos, visto que no contexto da Aritmética apenas utilizaram o sinal de igual em sequências de cálculos. Também a possibilidade de reversibilidade é um aspeto interessante do *Solver*, os alunos têm a possibilidade de errar, refletir e reformular as operações realizadas (ver figura 1). A aposta na utilização deste programa computacional desenvolvido em *Excel* é também justificada por uma certa preferência pessoal e pelo seu indiscutível caráter "universal", na medida em que o *Excel* é uma ferramenta amplamente difundida e de fácil acesso para os alunos e para as escolas.



Possível erro do aluno que, tentando eliminar o coeficiente de 'x', adicionou '2' e obteve um resultado diferente do que esperava, desta forma será potenciada a sua reflexão e a correção da operação efetuada.

Figura 1 – Solver, feedback ao aluno.

2.4. Dificuldades dos alunos

O ensino e aprendizagem da Álgebra em geral, e das equações algébricas em particular, representam um enorme desafio para professores e alunos. Logo à partida encontramos o desafio de perceber o que o significa e como se reconhece o que é uma equação. Muitas vezes é oferecido um critério de reconhecimento de equações como uma sequência de símbolos que incluem um sinal de igual (Chazan & Yerushalmy, 2003), ocorrendo aqui uma transferência do conceito de equação para uma igualdade. As equações podem ainda ser entendidas como fórmulas, identidades, propriedades dos números, equações de funções e equações para resolver (Usiskin, 1988).

No ensino e aprendizagem das equações emerge a dificuldade relativa à transição da Aritmética para Álgebra, nomeadamente ao nível da compreensão do símbolo de igual como um símbolo relacional. É uma premissa que, transcender a conceção de que o sinal de igual é apenas um sinal utilizado em sequências de cálculo, constitui uma importante ajuda aos alunos na aprendizagem da Álgebra (Herscovics & Kieran,1980). Importa pois que os alunos se apropriem do facto de, na Álgebra, o símbolo de igual permitir que se efetuem operações a ambos os membros da igualdade, na tentativa de encontrar um valor que torne a expressão verdadeira (Ponte, Branco & Matos, 2009).

De acordo com o Programa e Metas de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), o ensino das equações algébricas deverá ter como objetivo principal, mas não limitador, a resolução de equações e problemas. Para Ponte, Branco & Matos (2009), os objetivos no 1.º e 2.º ciclos deverão ser, sobretudo, o desenvolvimento o conceito de igualdade, a compreensão das propriedades das operações e a relação de cada operação com a sua inversa. Assim, será necessário que os alunos adquiram, primeiramente, conceções básicas das equações, podendo ser uma estratégia de superação das dificuldades dos alunos, começar esta temática recorrendo a equações muito simples, como '__ + 12 = 14'. Este tipo de equações já esteve presente em alguns Mini-Testes realizados pelos alunos do 7.º C, quando estudaram no 1.º período as operações. Após o trabalho de recuperação deste tipo de equações, será pertinente introduzir o conceito de incógnita como a quantidade que se quer descobrir. Perceber o conceito de incógnita é crucial para o estudo da Álgebra, na medida em que um dos grandes problemas que obriga a um esforço dos alunos para compreender e trabalhar em Álgebra, resulta da sua limitada interpretação da incógnita (NCTM, 1991).

No ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau é comum encontrar uma abordagem assente num conjunto de procedimentos que podem ser efetuados em ambos os membros da equação, de modo a encontrar o valor da incógnita que dá sentido à igualdade (Chazan & Yerushalmy, 2003). A aplicação destes procedimentos representou, tal como seria previsível, uma dificuldade para os alunos da turma onde realizei o meu estudo, isto porque estes alunos já tinham revelado, no 1.º período, dificuldades nas operações aritméticas de multiplicar, dividir, adicionar e subtrair e na aplicação das regras das potências, em especial, tinham sentido dificuldade sempre que lidavam com expressões numéricas onde existiam parêntesis.

No ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau, os alunos têm também de lidar com a dificuldade de incorporar novos termos no seu léxico matemático, como: termo, membro, incógnita, equivalência, coeficiente numérico, parte literal, monómio, princípios de equivalência, solução da equação entre outros.

Para os alunos, resolver equações, ou seja, encontrar o valor que torna a equação numa identidade, representa um conjunto importante de dificuldades. É crucial que numa primeira fase os alunos possam interiorizar, ainda que de forma informal, eventualmente recorrendo à analogia das balanças, regras baseadas nos princípios de equivalência. Estas regras devem ser entendidas como a aplicação da mesma operação em ambos os membros da equação, compreendendo-se que a aplicação destes princípios, produz uma situação, ou seja, uma equação, que é equivalente à anterior.

Outras dificuldades dos alunos no estudo das equações do 1.º grau são também o lidar com os casos de impossibilidade e com os casos de indeterminação. De seguida é apresentado, em tabela, uma sistematização das dificuldades e erros mais comuns dos alunos na aprendizagem desta temática.

Tabela 1 - Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau (Ponte, Branco e Matos, 2009).

Erro\Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais ‘+’ e ‘=‘ como indicadores de uma ação	3+ 4n = 7n 2a + 5b = 7ab	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorreta de monómios do 1..º grau	Interpretação de 4y como: – quatro ‘ y ‘s’; – um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; – 4 + y por analogia com $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$	Booth, 1984
Uso de parêntesis	3(x + 2) = 7x ⇔ 3x + 2 = 7x	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorreta de termos semelhantes	− 2x + 5x = 8 ⇔ −7x = 8	Kieran, 2006

Erro\Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição incorreta de termos não semelhantes	2x + 5 = x +8 ⇔ 7x = 9	Kieran, 1985
Transposição incorreta de termos	16x − 215= 265⇔16x = 265− 215 30 = x + 7 ⇔ 30 + 7 = x 3x + 5 = 2x ⇔ 3x = 2x + 5 7x = x +8⇔7−8 = x + x	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (Redistribution)	−2x +5 = 8⇔ −2x +5−5 = 8+5	Kieran, 1992
Eliminação	3x −3 = 2x − 4 ⇔ x = 2x −4	Kieran, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	6x = 24 ⇔ 6 + x = 24 11x = 9x = $\frac{11}{9}$ 2x = 4 ⇔ i) x = 4 − 2 ; ii) x = $\frac{4}{-2}$; iii) x = $\frac{2}{4}$ − x = −17 ⇔ ?? − x = 4 ⇔??	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

3. Unidade de ensino

3.1. Contexto

A escola onde ocorreu a minha intervenção é a Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto, sita em Queluz, concelho de Sintra. Esta escola pertence ao agrupamento de escolas de Queluz-Belas. De acordo com o projeto educativo da escola, elaborado a 13 de Março de 2013, a população escolar da Escola Básica Secundária é constituída por 2408 alunos. Analisando a distribuição dos alunos pelos diversos ciclos de ensino de todo o agrupamento, observamos que 52% dos alunos frequenta a escola onde irei desenvolver o meu plano de trabalho (ver figura 2).

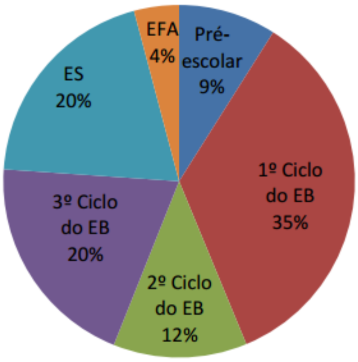


Figura 2 – Percentagem de alunos por ciclo.

No que respeita à nacionalidade, regista-se uma percentagem muito significativa de alunos estrangeiros, cerca de 17%, com predomínio de alunos proveniente dos PALOP e do Brasil.

O corpo docente do agrupamento é constituído por 343 professores, sendo que cerca de 80% dos professores pertencem ao quadro de escola.

A turma onde realizei a minha intervenção é a turma do 7.º C. Esta turma é constituída por 28 alunos, sendo que 17 são raparigas e 11 são rapazes, a idade dos alunos está compreendida entre os 11 e os 13 anos de idade, não havendo nenhum aluno repetente. Existem nesta turma dois alunos com Necessidades Educativas Especiais, os quais são alunos bastante introvertidos e com uma participação bastante reduzida nas aulas de Matemática.

Em termos socioeconómicos, e tendo em conta a análise dos questionários escritos, redigidos pelo professor cooperante responsável pela turma do 7.º C, e realizados pelos alunos no início do ano letivo, verificamos que existe um certo desfavorecimento socioeconómico das famílias, isto porque parte importante dos agregados familiares, ou são monoparentais, ou incluem situações de desemprego, ou de emprego em ofícios de pouca remuneração, como a construção civil, limpezas ou segurança. No total existem 10 alunos a receber apoios da Ação Social Escolar (ASE).

No questionário distribuído aos alunos, três deles revelaram que a sua disciplina preferida era a Matemática e dois disseram que Matemática era a disciplina que menos gostavam. Ao nível disciplinar, esta turma é caraterizada, por alguns professores, como sendo bastante agitada, tendo-se registado no 1.º período um total de nove participações disciplinares ao diretor de turma.

Na prática letiva supervisionada, desenvolvida ao longo do 1.º período letivo, fui discutindo com o professor Paulo Alvega e com o meu colega de mestrado Pedro Mateus, diversos aspetos acerca do desempenho da turma do 7.º C. Observámos que a turma teve um desempenho bastante satisfatório ao longo das aulas, os alunos revelaram-se bastante bem regulados ao nível do seu comportamento, mostrando-se bastante participativos e envolvendo-se significativamente na resolução tanto das tarefas propostas pelo professor responsável, como das tarefas sugeridas por mim. Não obstante, cerca de metade da turma, doze alunos, teve a classificação negativa a Matemática no final 1.º período. Quatro alunos da turma obtiveram classificação máxima e assinalo que cinco dos alunos do 7.ºC ficaram no quadro de honra da escola. Em termos de dificuldades mais generalizadas, os alunos revelaram problemas com as operações aritméticas lecionadas no 2.º ciclo, verificando-se que a ocorrência de erros foi mais frequente quando os alunos operaram com frações.

No 2.º período, no qual realizei a minha intervenção, a generalidade dos alunos continuaram a mostrar-se bastante envolvidos na realização das tarefas propostas e na discussão de raciocínios e produções, seus e dos seus colegas.

Tendo em conta o discutido no conselho de turma do final do 2.º período, a turma melhorou o seu comportamento relativamente ao 1.º período, tendo-se registado apenas duas participações disciplinares. Três alunos estiveram a ser acompanhados pela professora do ensino especial, a qual apontou como medidas educativas de melhoria do desempenho dos alunos, uma avaliação diferenciada que envolvesse a realização de mais testes, com menos conteúdos, realizados em salas sem outros alunos para aumentar a concentração, com mais tempo e com questões de resposta mais sucinta. Também foi sugerido por esta professora que estes alunos tivessem a possibilidade de repetir os testes de avaliação após a entrega e correção dos mesmos. Pretendendo-se desta forma que estes alunos beneficiassem da correção dos testes que os professores normalmente realizam em aula.

Em termos de acompanhamento pelos serviços psicológicos da escola, foram cinco os alunos a beneficiar deste tipo de acompanhamento, pelos motivos de faltas injustificadas ou intercaladas, possibilidade de *deficit* de atenção ou cognitivo e possibilidade de existência de distúrbios de índole emocional.

No final do 2.º período, ao nível das classificações obtidas pelos alunos em todas as disciplinas verifica-se uma melhoria face ao 1.º período, no total a turma subiu 11 valores. Em Matemática registaram-se 14 negativas, ou seja, mais duas do que no 1.º período e dos alunos que obtiveram classificação de máxima, apenas um conseguiu mantê-la, os outros desceram para quatro. Nove dos alunos do 7.º C foram também incluídos no quadro de honra da escola, ou seja, mais quatro do que no 1.º período.

No 3.º período as participações disciplinares aumentaram significativamente, foram realizadas um total de doze participações. Ao nível das classificações obtidas a todas as disciplinas a turma melhorou significativamente face ao período anterior, no total essa melhoria foi de 102 valores e 11 alunos foram colocados no quadro de honra. A Matemática, face ao período anterior, registaram-se menos negativas e mais classificações de nível cinco, 10 alunos tiveram classificação dois e quatro obtiveram classificação cinco. Nenhum aluno ficou retido, no entanto houve três alunos cujo nível de classificação foi alterado pelo Conselho de Turma.

3.2. Ancoragem no programa e temas matemáticos trabalhados

Tendo em conta o Programa e Metas de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), a unidade curricular das equações do 1.º grau, enquadra-se no domínio da Álgebra, devendo ser abordados os procedimentos próprios da Álgebra ao nível das propriedades dos monómios. Em termos de metas terei em conta as relativas às equações algébricas, cujos descritores referem-se à resolução de equações do 1.º grau (ALG 7 – 3). Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), é no 3.º ciclo que se institucionaliza o uso da linguagem algébrica e que se procura desenvolver nos alunos a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas, tendo-se como principais objetivos, a representação simbólica de situações matemáticas e não matemáticas, o desenvolvimento do pensamento algébrico e a resolução de problemas.

De acordo com o planeamento anual de conteúdos da Escola Padre Alberto Neto (EBSPAN), o estudo das equações algébricas foi previsto para o 2.º período letivo. Especificamente foram previstos os conteúdos que se apresentam de seguida (ver tabela 2).

Tabela 2 - Planeamento anual de conteúdos EBSPAN.

Conteúdos	Tópicos	Metas
Expressões algébricas	• Identificar monómios semelhantes • Reduzir monómios semelhantes	ALG 7
Equações • **Equações algébricas do 1.º grau a uma incógnita** • **Equações equivalentes** • **Princípios de equivalência** • **Equações numéricas** • **Equações lineares** • **Classificação de equações** • **Problemas envolvendo equações**	• Equação definida por uma igualdade de funções (primeiro e segundo membro) • Identificar equações equivalentes • Princípios de equivalência de equações • Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução baseadas nos princípios de equivalência • Equações numéricas • Equações lineares (igualdade de duas funções afins) • Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema • Conceber e por em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados	ALG 7 (3.1 a 3.8 e 4)

A intervenção letiva a que se refere o presente relatório foi destinada à introdução do estudo das equações do 1.º grau, seguindo-se, após a minha intervenção, a resolução de problemas envolvendo equações. O estudo das equações do 1.º grau foi precedido do estudo do paralelismo, congruência e semelhança (domínio: Geometria). Findo o estudo do domínio da Álgebra, seguiu-se o estudo do tratamento de dados e de medidas de localização (domínio: Organização e tratamento de dados).

A minha intervenção letiva, tal como ilustrado na tabela 3, abrangeu um total de oito aulas, três de 45 minutos e cinco de 90 minutos. O estudo das equações do 1.º grau foi iniciado numa aula de 45 minutos (A1), à qual se seguiu uma aula de 90 minutos (A2). A terceira, quinta e sexta aulas (A3, A5, A8), ocorreram na sala de computadores, tendo sido utilizado nessas aulas o programa computacional *Solver*. Nos últimos 30 minutos da oitava aula (A8), houve ainda lugar à realização de um Mini-Teste sobre as equações do 1.º grau.

Tabela 3 - Calendarização da intervenção.

	Seg.	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sáb.	Dom.
Fev. & Mar. 2016	15	16	17	18 **A1** 45’ “AlfaZoo”	19 **A2** 90’ “Férias C.”	20	21
	22	23 **A3** 90’ “Aluno X”	24	25 **A4** 45’ “Guloseimas P.”	26	27	28
	29	01 **A5** 90’ “Equações I”	02	03 **A6** 45’ “Mestres e G.”	04 **A7** 90’ “Mestres e G.”	05	06
	07	08 **A8** 90’ “Equações II”	Legenda: Dia / Aula / Duração / Tarefa				

3.3. Estratégias e organização de aula, propósitos gerais de ensino

Se entendermos que a principal finalidade formativa da Matemática é ensinar os jovens a pensar e que essa atividade apenas é desenvolvida através de um processo de aprendizagem ativa, descobrindo o aluno por si mesmo, então somos conduzidos à resolução de tarefas de índole problemática (Polya, 1967). Na minha intervenção procurei privilegiar a aprendizagem ativa dos alunos, isto porque além da apreensão de procedimentos algébricos, pretendi que os alunos desenvolvessem o seu pensamento algébrico. Atuar de forma a que os alunos deem sentido ao que estão a aprender, deve ser a preocupação principal dos professores, isto para que os alunos encontrem na escola um local onde realmente aprendam a pensar (Schoenfeld, A. 1996). Outro objetivo da minha intervenção foi desenvolver nos alunos o gosto pela Matemática, isto porque uma das finalidades do ensino da Matemática deverá ser conduzir o aluno a apreciá-la, desenvolvendo uma atitude positiva sobre o seu papel e importância (ME 2007). Neste sentido, parece-me fulcral que os alunos encontrem interesse e significado no que aprendem, devendo-se privilegiar abordagens de ensino de carácter intuitivo, que levem o aluno a familiarizar-se antes de mais com o concreto e só depois com o abstrato (Polya, G. 1967).

Uma vez que as tarefas assumem um papel central na prossecução dos objetivos de aula, pois são o "objeto para a atividade do aluno" (Christiansen & Walther, 1986, citado por Canavarro & Santos, 2012, p. 99), as tarefas propostas tiveram como objetivo atender ao descrito nas metas curriculares, mas também o praticar um tipo de ensino motivador, não rotineiro e que não é centrado no professor mas sim nos alunos (Abrantes, 1985).

Foi propósito da minha intervenção letiva, contribuir para o desenvolvimento de capacidades transversais dos alunos nomeadamente o raciocínio matemático e a comunicação (MEC, 2013; ME, 2007; Ponte, 2005), bem como contribuir para o desenvolvimento da autonomia, do espírito crítico e da capacidade para lidar com situações complexas, para conjeturar, argumentar, generalizar e estabelecer conexões (ME, 2007; Ponte, 2005; Ponte et al., 1998).

A primeira tarefa que desenvolvi para esta intervenção letiva, AlfaZoo, recuperou o contexto de dois amigos que já tinham sido apresentados aos alunos como personagens de tarefas utilizadas nas primeiras intervenções que realizei no 1.º período. Nesta tarefa, os amigos Alice e Marco registaram o número de animais preferidos que viram nas suas visitas a jardins zoológicos e os alunos foram convidados a descobrir, a lógica que estava presente na organização dos dados de registo, isto é, a adição de monómios semelhantes que a Alice realizou. O desafio à compreensão do padrão utilizado pela Alice, na representação simbólica que utilizou para registar o número de animais que viu, teve como propósito permitir a generalização das regras utilizadas na simplificação de expressões, nomeadamente no que à identificação de monómios semelhantes e à sua adição diz respeito. Considero que o contexto utilizado foi interessante e provido de sentido para os alunos, tal como se verificou num dos momentos de discussão, em que um aluno explicou à turma que a expressão 'g + 3u = 4gu' era falsa pois um golfinho mais três ursos não é igual a quatro "gursos".

Na elaboração e implementação desta tarefa, e das seguintes, tive então como orientações estratégicas privilegiar uma aprendizagem ativa, criar contextos interessantes e significativos para os alunos, desenvolver o seu pensamento algébrico e estimular as suas capacidades transversais. Em todas as tarefas que criei tive em conta a sua extensão, normalmente mais extensa do que aquilo que os alunos conseguiriam resolver numa aula, isto para garantir que os alunos teriam sempre material para trabalhar durante os momentos de trabalho autónomo.

Ao nível da organização do trabalho dos alunos, foi seguido o *modus operandi* instituído pelo professor responsável, ou seja, os alunos trabalharam aos pares, sendo que os pares foram constituídos privilegiando a heterogeneidade dos duos.

Foram tidos em conta fatores como as classificações obtidas nos últimos testes de avaliação, o comportamento e o sexo dos alunos. O propósito desta estratégia é o alavancar dos benefícios do trabalho colaborativo, como o questionamento mútuo e o desenvolver e criticar dos seus argumentos e os dos seus colegas (Abrantes, 1994, citado por Oliveira et al.). Assim, procurei que se continuasse a desenvolver nos alunos a capacidade de comunicar matematicamente e de negociar significados. Trabalhando aos pares, os alunos são estimulados a compreender os colegas e a transmitir as suas ideias de forma mais percetível (Oliveira, Canavarro & Menezes, 2012).

Todas as oito aulas da minha intervenção foram segmentadas em momentos com diferentes papéis de modo a criar dinâmicas diversas e proporcionar um ambiente de aprendizagem mais enriquecido. Foram considerados os diferentes momentos de aula, tal como mencionados por Canavarro (2011), designadamente a introdução da tarefa, o desenvolvimento de trabalho autónomo por parte dos alunos, a discussão em grupo turma e a síntese de ideias. Regra geral, as aulas foram iniciadas com uma introdução da tarefa a realizar, sendo que o intuito desta introdução foi despertar o interesse dos alunos e clarificar que trabalho irá ser desenvolvido e em quanto tempo. Desta forma quis estimular o foco e o envolvimento dos alunos na fase de resolução da tarefa, onde os alunos, trabalhando aos pares, tiveram oportunidade de formular e discutir conjeturas, testar hipóteses e explorar estratégias e raciocínios. A negociação de significados que ocorre nesta fase é um instrumento bastante útil para manter os alunos focados e envolvidos na resolução da tarefa. Aquando da discussão subsequente, os alunos beneficiaram do desenvolvimento da sua capacidade de comunicar ideias e pontos de vista, sendo confrontados com diferentes estratégias de resolução (Oliveira *et al.*, 2012). Por fim, o momento da sintetização de ideias constituiu uma oportunidade para clarificar conceções erróneas, reforçar ideias corretas e estabelecer conexões matemáticas. O professor deve gerir o currículo de forma a proporcionar "momentos próprios para exploração, reflexão e discussão (…) e criar oportunidades que favoreçam a aprendizagem dos alunos" (Ponte, 2005, p. 23).

Ao nível das ações discursivas do professor, tal como mencionadas por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro (2013), destaco na minha intervenção o questionar, na medida em que a inquirição e o testar de conhecimentos foram úteis para desafiar os alunos a formular, a defender e a justificar as suas conjeturas. Quanto às respostas, procurei privilegiar o redireccionamento de questões, por forma a desenvolver os conhecimentos e autonomia dos alunos, resistindo, sempre que possível, à sua validação imediata (Canavarro, 2011; Menezes *et al.*, 2013). Desta forma as explicações foram predominantemente instrucionais (Menezes *et al.*, 2013).

O tempo e a sua gestão, muito controlada, foram dos maiores desafios que senti e a que procurei dar resposta através de um planeamento cuidado. É nesta fase que as ações do professor: analisar, integrar, colocar hipóteses, selecionar e organizar (Roldão, 2009), tornam-se imprescindíveis para que a aula e em particular a tarefa possam ser um valioso momento de aprendizagem para os alunos.

Ao nível dos materiais utilizados, procurei que os mesmos fossem diversificados. Elaborei um total de sete tarefas distintas para serem trabalhadas nas aulas, solicitei a consulta do manual escolar e foi utilizado o programa computacional *Solver* em três das oito aulas da minha intervenção. O trabalho em torno das tarefas concretizou-se em moldes semelhantes ao verificado nas intervenções que realizei no 1.º período, ou seja, foi distribuído um enunciado a cada par de alunos no qual estes redigiram as suas respostas.

A avaliação é parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, ou seja, de acordo com a NCTM (2008, p. 23) "a avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma Matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores, quer para os alunos". Atendendo a este princípio da NCTM, perspetivei a avaliação como uma interação reguladora entre professor e alunos, de modo a melhorar quer a aprendizagem dos alunos, quer as decisões sobre o processo de ensino-aprendizagem (Pinto & Santos, 2006). Tal como a NCTM (2008) menciona, a avaliação deve ser contínua e uma atividade rotineira na sala de aula.

No final de cada aula, os enunciados com os registos dos alunos foram recolhidos e fotocopiados para serem devolvidos, um a cada aluno, na aula seguinte. Estas resoluções foram entretanto analisadas por mim e, dei *feedback* privilegiando a anotação como diálogo (ex.: "Revê a página 7 do Manual") de modo a promover a reflexão e a autoavaliação. No *feedback* dado aos alunos redigi também a resolução dos exercícios onde os alunos erraram, isto para que pudesse ter mais um instrumento de apoio ao seu estudo. Desta forma, pôde ser desenvolvida uma avaliação formativa, que permitiu diagnosticar algumas dificuldades sentidas pelos alunos e, consequentemente, adaptar os processos e materiais de ensino, especialmente no que diz respeito à recuperação de algumas questões de umas tarefas para as outras. Em ordem a diversificar os instrumentos de avaliação, foi também comtemplado, um momento de avaliação sumativo sob a forma da realização de um Mini-Teste.

3.4. Tarefas

Na conceção das tarefas optei por uma abordagem de cariz exploratório, procurando que as mesmas criassem a necessidade de introduzir linguagem formal como por exemplo incógnita, termos semelhantes, equivalência, equação e outros, isto em vez de introduzir tais designações à partida que assim poderiam não fazer sentido para os alunos. Ao nível dos conceitos e procedimentos a estudar, procurei que os mesmos fossem abordados com significado, nomeadamente recorrendo a exemplos de balanças ou à própria forma de funcionamento do *Solver* no que à resolução de equações diz respeito. Desta forma, creio que a apropriação do que é uma equação, do que é a resolução de uma equação, entre outros, saiu beneficiada e foi realizada com compreensão.

3.4.1. AlfaZoo (A1)

A tarefa AlfaZoo teve como objetivos principais a identificação de monómios semelhantes e a simplificação de expressões. A tarefa foi elaborada procurando proporcionar aos alunos um contexto real, simples e que fizesse sentido. Uma vez que esta foi a primeira tarefa trabalhada no contexto das equações do 1.º grau, procurei que não fossem necessários conhecimentos prévios significativos e que os alunos pudessem trabalhar as questões de forma intuitiva. Assim, na primeira questão, os alunos foram convidados a adicionar e a organizar, por ordem crescente, as quantidades de animais que os amigos Alice e Marco registaram nas suas visitas aos jardins zoológicos. Desta forma, adicionando quantidades de animais da mesma espécie, os alunos num contexto de realidade começavam a entrar em contato com a adição de termos semelhantes.

Na segunda questão, os alunos entraram em contacto com a linguagem simbólica própria da Álgebra e iniciaram o seu percurso de abstração. Promovendo-se assim o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. O objetivo da simplificação de expressões algébricas foi concretizado nesta questão, pedindo-se aos alunos que dessem significado às simplificações efetuadas pela Alice nos seus registos.

A terceira questão da tarefa apresentou uma linguagem exclusivamente simbólica, ainda que apoiada pela ligação ao contexto real das questões anteriores. Esta ligação foi concretizada pela escolha dos símbolos ‘u’ e ‘g’ que facilitaram a associação aos ursos e golfinhos dos Zoos. Foram explorados nesta questão alguns dos erros habituais dos alunos, nomeadamente a adição de termos não semelhantes, a subtração das partes literais dos monómios (ex.: ‘3u – u = 3’) e a incorreta aplicação da propriedade distributiva, sendo este o pré-requisito mais significativo da tarefa.

Nesta tarefa, e considerando o que vinha sendo realizado pelo professor responsável em tarefas anteriores, utilizei um quadro de conceitos-chave para ser preenchido no momento da síntese de ideias. A referência ao manual escolar que constava neste quadro visou apoiar a organização do estudo dos alunos e estimular a relação entre diferentes materiais escolares.

3.4.2. TPC I

Na sequência da tarefa AlfaZoo, que foi trabalhada e discutida na primeira aula da minha intervenção, com a duração de 45 minutos, foi solicitado aos alunos que dessem sequência ao trabalho desenvolvido através de um trabalho para casa a ser entregue na aula seguinte. No enunciado desta tarefa era solicitado aos alunos que, com base no trabalho desenvolvido em aula, simplificassem algumas expressões algébricas. Nestas expressões optei por utilizar os símbolos ‘x’e ‘y’ para que os alunos dessem mais um passo na generalização do processo de redução de monómios semelhantes e, consequentemente, no desenvolvimento do seu pensamento algébrico. Novamente, foi necessária a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação e confrontei os alunos com a redução de termos independentes e de termos de grau 2.

Entendi como arriscada a aposta num trabalho para casa que solicitava procedimentos não realizados em aula, nomeadamente ao nível da redução dos termos independentes e dos termos de grau 2. No entanto, esta foi uma opção pensada que visou desafiar os alunos, estimular o estabelecimento de conexões e desenvolver a capacidade de generalização na manipulação de símbolos. Este trabalho para casa foi redigido na mesma página da questão 3 da tarefa AlfaZoo, isto com o intuito de disponibilizar aos alunos um enunciado onde, após a discussão e síntese de ideias, constasse uma resolução corrigida da questão 3 que apoiasse o trabalho individual.

Em termos avaliativos, esta tarefa permitiu-me recolher elementos relativos às dificuldades dos alunos e estabelecer uma interação reguladora, ao nível do processo de ensino e aprendizagem. Como referido, na análise dos trabalhos para casa dei *feedback* aos alunos, privilegiando a anotação como diálogo de modo a promover a reflexão e a autoavaliação.

3.4.3. Férias de Carnaval (A2)

Para a segunda aula da minha intervenção, a qual teve uma duração de 90 minutos, elaborei a tarefa Férias de Carnaval que visou concretizar os objetivos de resolução de equações simples (questão 1), estabelecimento da noção e significado de incógnita (questões 2 e 3), tradução algébrica de situações (questão 3), princípios de equivalência e noção de equação como uma igualdade que traduz uma situação em equilíbrio, neste caso, entre o conteúdo dos pratos de uma balança (questões 3 e 4).

Esta tarefa, tal como a anterior, foi de contexto realista e procurou ser significativa e próxima dos alunos, nomeadamente porque voltou a invocar os personagens Alice e Marco, porque referiu-se às miniférias de Carnaval, das quais os alunos acabavam de regressar e porque recuperou os perigos da utilização do corretor apontados pelo professor responsável em aulas anteriores onde, para regular o comportamento dos alunos, solicitou que não utilizassem nem colas nem corretores nas aulas de Matemática, isto porque a sua utilização costumava redundar em acidentes de pouca limpeza.

Na primeira questão, os alunos foram confrontados com quatro equações de resolução intuitiva, para que, na questão 2, fosse formalizado o conceito de incógnita. Esta formalização representou um salto cognitivo significativo tendo em conta a aula anterior, onde os símbolos utilizados ‘u’ e ‘g’ representavam abreviaturas de nomes de animais e, nesta tarefa, os símbolos ‘G’, ‘M’, ‘R’ e ‘L’, representam quantidades desconhecidas, ou sejam, incógnitas. A atenção dada ao contexto da tarefa foi um preceito que utilizei para que o salto cognitivo a dar pelos alunos pudesse ser mais seguro.

As questões 3 e 4 recorrem ao cenário de uma balança utilizada por um mestre chocolateiro em situações de pesagem diferentes. Um dos objetivos destas duas questões consistia em desafiar os alunos a dar novos saltos cognitivos, designadamente, a utilizar o símbolo de ‘=‘ como símbolo relacional representativo de uma situação de equilíbrio, a traduzir a frase do mestre chocolateiro para linguagem algébrica e a descobrir que, os princípios de equivalência presentes nas ações realizadas aos conteúdos dos pratos da balança não alteravam o equilíbrio da mesma. Assim, procurei que os alunos começassem a desenvolver a compreensão dos procedimentos algébricos que conduzem a situações onde o equilíbrio é mantido.

3.4.4. Aluno X (A3)

A tarefa Aluno X foi a primeira tarefa utilizada juntamente com o programa computacional *Solver*. Esta tarefa foi implementada numa aula de 90 minutos e os objetivos que tive em vista na sua conceção foram a resolução de equações do 1.º grau através da aplicação dos princípios de equivalência, a tradução algébrica de problemas e a compreensão do significado da incógnita.

Seguindo a mesma orientação das tarefas anteriores, foi criado um contexto significativo para os alunos cujo personagem é o Aluno X. Este personagem foi criado pelo professor responsável e foi invocado, em aulas anteriores, quando o professor quis confrontar os alunos com hipóteses de resolução.

Uma vez que era nesta tarefa que os alunos, pela primeira vez, seriam desafiados a resolver equações com os procedimentos próprios da álgebra, foi realizada uma introdução à tarefa que contemplou a resolução de duas equações em grupo turma.

Realizada a introdução da tarefa, os alunos trabalhando como habitualmente aos pares foram confrontados, na primeira questão, com uma equação resolvida pelo Aluno X na folha de cálculo 1, sendo-lhes solicitado que completassem a 2.ª descrição do que descrições do que havia sido realizado pelo Aluno X na célula sombreada (ver figura 3).

	Termos numéricos ou literais		Apenas termos numéricos		
V1(x) = V2(x)	Somar	Subtrair	Multiplicar	Dividir	O que fez o Aluno X?
10x+ 5 = 55 10x+ 5+(-5) = 55+(-5)		5			1º Subtraiu 5 unidades a cada membro da equação e obteve uma equação equivalente.
10x = 50 (10x):(10) = (50):(10)				10	2º Dividiu 10 unidades cada membro da equação e obteve uma equação equivalente.
x = 5					3º Encontrou o valor da incógnita, ou seja, a solução da equação.

Figura 3 - Aluno X, questão 1.

Na 2.ª descrição que consta na figura anterior, efetuada por um par de alunos, é verificável que estes apesar de não utilizarem o português correto, compreenderam que o Aluno X dividiu os termos da equação por ‘10’.

Na questão 4 era solicitado aos alunos que realizassem o procedimento complementar ao efetuado na questão 1 em quatro equações, ou seja, que observassem as descrições do Aluno X e preenchessem os quadros azuis, relativos às operações a realizar nos membros das equações.

A opção pela índole tutorial das questões 1 e 4 teve como propósito orientar o trabalho dos alunos numa primeira fase para que, seguidamente, na questão 5, fossem desafiados a resolver duas equações e a descrever qual o procedimento que utilizaram.

As questões 2 e 3 visaram trabalhar o significado da incógnita e a tradução algébrica de problemas, complementando-se assim o trabalho realizado ao nível dos procedimentos algébricos, com o trabalho relativo à compreensão dos objetos matemáticos em causa.

3.4.5. Guloseimas para a Páscoa (A4)

Para a quarta aula da minha intervenção, aula de 45 minutos, desenvolvi novamente uma tarefa contextualizada, nomeadamente porque volta a invocar os amigos Alice e Marco e porque volta a referir-se às férias dos alunos, desta vez as da Páscoa.

Os objetivos que estiveram na génese desta tarefa foram a tradução de problemas, o atribuir de significado à incógnita e aos termos da equação (questões 1 e 2), a compreensão e a aplicação dos princípios de equivalência e a resolução de equações do 1.º grau (questões 2 e 3).

A primeira questão, composta por três alíneas, solicitava que os alunos identificassem a equação que traduzia a situação enunciada, que identificassem o significado de cada termo da equação e que identificassem o significado da incógnita, por esta ordem.

Na segunda questão, os alunos deparam-se com uma equação que traduz a situação que é descrita, sendo solicitado que expressem qual o significado da incógnita. Desta forma procurei complementar os procedimentos algébricos que foram trabalhados na aula anterior, com a atribuição de significado à incógnita. Ainda nesta questão, os alunos foram desafiados a identificar se algumas das quatro equações apresentadas era equivalente à equação anterior. Também aqui procurei fomentar a atribuição de significado, neste caso aos procedimentos que permitem obter equações equivalentes. Foi também minha intenção que os alunos fossem confrontados com erros frequentes na resolução de equações, nomeadamente a adição de termos não semelhantes e a transposição de termos da equação de um membro para outro, sem aplicar os princípios de equivalência. Desta forma, procurei potenciar a riqueza dos momentos de discussão e síntese e eliminar, tanto quanto possível, conceções erróneas dos alunos.

A terceira questão da tarefa solicitava a resolução de duas equações, uma com um termo literal no primeiro membro e outra com um termo literal em cada membro da equação, isto à semelhança do que foi contemplado na tarefa Aluno X.

As incógnitas escolhidas para esta tarefa ‘g’ e ‘p’ significando respetivamente, número de gomas por embalagem e número de lacasitos por pacote, visaram permitir que nos momentos de discussão e síntese se reforçasse a ideia que a incógnita é um valor ou quantidade que se pretende descobrir, devendo ser abandonada a conceção de que ‘g’ significa gomas e ‘p’ significa pacotes. Apoiava-se então assim o salto cognitivo do conceito de símbolo ou abreviatura, para o conceito de incógnita.

3.4.6. Equações I (A5)

A quinta aula da minha intervenção, aula de 90 minutos, foi a segunda que ocorreu na sala de computadores, tendo sido utilizado novamente o programa computacional *Solver*. Os objetivos que pretendi concretizar com o apoio da tarefa

Equações I foram a tradução de problemas para linguagem algébrica (questão 1), a determinação da solução da equação e verificação da solução da equação (questões 1, 2 e 3), a resolução de equações aplicando os princípios de equivalência (questões 1, 2 e 3) e a classificação das equações como possíveis e determinadas (questão 1), possíveis e indeterminadas e impossíveis (questão 2). Pretendi que a classificação das equações fosse concretizada no momento de discussão e síntese, isto após os alunos terem tentado resolver equações indeterminadas e impossíveis e terem sentido a necessidade de, dar um nome a estas equações cuja solução não decorre de uma equação "final" do tipo 'x = a'.

Em termos de contexto, esta tarefa inicia-se com uma questão que descreve situações vividas pela Alice e pelo Marco e, nas duas questões seguintes, desenrola-se em contexto algébrico abstrato. Esta passagem teve como propósito desenvolver a capacidade de abstração dos alunos e consequentemente o seu pensamento algébrico.

A primeira questão da tarefa descrevia três situações e solicitava aos alunos que associassem a cada uma delas, uma das três equações existentes nas primeiras três folhas de cálculo do *Solver*. Para aumentar o grau de desafio, as situações descritas são traduzidas por equações bastante parecidas e, após realizarem as associações, pedia-se aos alunos que encontrassem a solução de cada equação e que descrevessem o significado de cada uma das soluções encontradas. Desta forma, os alunos complementaram, por intermédio desta tarefa, a prática dos procedimentos algébricos com a atribuição de significado. Isto visando o desenvolvimento da compreensão dos procedimentos e do pensamento algébrico.

A segunda questão da tarefa solicitava a resolução de duas equações, convocando assim os procedimentos algébricos que os alunos utilizaram em aulas anteriores e confrontava-os com equações cuja solução não é determinada. A colocação deste desafio visou também estimular o espírito crítico dos alunos e a sua capacidade de conjeturar.

Na terceira questão da tarefa, os alunos eram desafiados a descobrir se alguma de cinco equações tinha solução '2'. Com esta questão pretendi desafiar os alunos a estabelecer conexões com a verificação de soluções que ocorreu em aulas anteriores e abrir espaço, nos momentos de discussão e síntese, para que surgisse a compreensão de que, resolver todas as equações era a forma mais difícil de efetuar a verificação pedida. Esta aposta na verificação teve como objetivo reforçar o significado da solução de uma equação, como sendo o valor que a torna numa identidade.

3.4.7. Mestres e guloseimas (A6 e A7)

Na conceção desta tarefa, inclui algumas questões recuperadas ou inspiradas nas tarefas anteriores. Selecionei questões que não foram devidamente discutidas em aulas anteriores, fundamentalmente por questões de tempo. E incluí questões do tipo daquelas onde detetei maiores dificuldades em aulas anteriores. A análise das produções realizadas pelos alunos e os momentos de discussão foram os instrumentos que, melhor me permitiram avaliar quais as questões que deveriam ser novamente trabalhadas.

A tarefa Mestres e guloseimas foi trabalhada em duas aulas, uma de 45 minutos e outra de 90 minutos. Em termos de contexto foram recuperados os cenários da balança do mestre chocolateiro, questão 1, as situações problemáticas da Alice e do Marco, questões 2 e 3, foi também utilizado um contexto exclusivamente abstrato nas questões 4 e 5.

Ao nível dos objetivos, as primeiras três questões da tarefa visavam a compreensão do significado da incógnita, a tradução algébrica de problemas, a aplicação dos princípios de equivalência e a utilização do sinal de '=' como representativo de um 'equilíbrio'. As questões 4 e 5 tinham como propósitos principais a resolução de equações, a identificação da solução das equações e a identificação do conjunto solução.

Na primeira questão, os alunos foram confrontados com as balanças do mestre chocolateiro da tarefa Férias de Carnaval e desafiados, no seu espírito crítico, a verificar a veracidade de cinco afirmações, das quais apenas duas eram verdadeiras.

Na segunda questão, inspirada na primeira questão da tarefa Guloseimas para a Páscoa, os alunos foram confrontados com a necessidade de transpor o entendimento de um símbolo, neste caso 'b', de abreviatura para incógnita que, nesta situação, representava a quantidade de bombons existentes em cada caixa de bombons. Nesta questão era pedido que os alunos selecionassem, em três, qual a equação que traduzia corretamente o enunciado, que indicassem o significado da incógnita e que determinassem a solução da equação, indicando ainda o que representava o valor encontrado.

Na terceira questão, inspirada na questão 2 da tarefa Guloseimas para a Páscoa, os alunos foram desafiados a resolver uma equação contextualizada, a atribuir significado à solução encontrada e a analisarem criticamente dois erros frequentes na resolução de equações, a transposição incorreta de termos e a adição de termos não semelhantes.

A quarta questão solicitava a determinação das soluções de quatro equações, as quais podiam ser obtidas de forma informal. Uma dessas equações era indeterminada e outra era impossível.

Na quinta questão era solicitada a resolução e classificação de três equações, uma determinada, uma indeterminada e uma impossível. Nestas equações voltava a ser um pré-requisito a propriedade distributiva da multiplicação.

3.4.8. TPC II

Após a sétima aula da minha intervenção (A7), e uma vez que a optei por não trabalhar com os alunos questão 3 da tarefa Mestres e guloseimas, isto por questões de tempo, recolhi as produções dos pares de alunos e distribui a cada aluno uma folha com a segunda parte da tarefa, questões 2 a 5, tendo solicitado que a resolvessem em trabalho de casa.

A minha solicitação ocorreu na aula do dia 4 de março, sexta-feira e planeei esta solicitação com o objetivo de os alunos, durante o fim-de-semana que antecedeu o Mini-Teste do dia 8 de março, terça-feira, tivessem a oportunidade de trabalhar conteúdos importantes que seriam alvo de avaliação.

Tal como ocorreu com o trabalho de casa que solicitei na primeira aula da minha intervenção, as produções dos alunos permitiram-me recolher elementos importantes relativos às suas aprendizagens e dificuldades. Desta forma, passei a dispor de mais elementos para regular o processo de ensino e aprendizagem e para enriquecer o meu trabalho de cariz investigativo. Na análise que fiz das produções dos alunos voltei a optar por dar *feedback* privilegiando anotação como diálogo, isto para fomentar a reflexão e a autoavaliação.

3.4.9. Equações II (A8)

Para última aula da minha intervenção, aula de 90 minutos, que decorreu na sala de computadores elaborei a tarefa Equações II. Os objetivos principais a concretizar com a implementação desta tarefa foram: a resolução e classificação de equações, a verificação da solução de equações e a tradução algébrica de problemas.

Na primeira questão da tarefa foi pedido aos alunos que resolvessem quatro equações no programa computacional *Solver* e que procedessem à sua classificação. O contexto desta questão é abstrato e pretendia-se que os alunos mobilizassem os conceitos trabalhados nas aulas anteriores, nomeadamente ao nível da aplicação dos princípios de equivalência, cuja compreensão se iniciou com o cenário das balanças do mestre chocolateiro. Considerei importante que, nesta última aula, os alunos fossem desafiados a trabalhar com representações essencialmente simbólicas e que a generalização dos equilíbrios das balanças fosse concretizada na resolução das equações.

Na segunda questão, era solicitado aos alunos que criassem um contexto que pudesse ser traduzido pela equação ‘9x-12 = 12+3x’, sendo dito no enunciado que ‘x’ representava o número de bolos que o mestre chocolateiro faz num dia, isto para orientar o arranque do trabalho dos alunos e para evitar grandes disparidades entre as suas produções. Com esta questão, pretendi reforçar o significado de incógnita, como a quantidade que queremos descobrir, e o significado de equação, como uma igualdade que traduz uma situação em equilíbrio.

A terceira questão da tarefa desafiava os alunos a verificar se alguma de cinco equações tinha solução ‘2’. Esta questão foi recuperada da tarefa Equações I e pretendeu, como referido, proporcionar momentos de discussão nos quais os alunos se apropriassem do procedimento de verificação e que reforçassem a sua compreensão do significado da solução de uma equação.

3.4.10. Mini-Teste

O Mini-Teste que concebi foi composto por quatro questões, as quais foram trabalhadas pelos alunos nos últimos 25 minutos da Aula 8 da minha intervenção. Os alunos realizaram o Mini-Teste aos pares, isto à semelhança do que aconteceu nos Mini-Testes anteriores, fomentando-se assim o trabalho colaborativo e a clareza ao nível do funcionamento dos momentos de avaliação — os testes anteriores foram sempre realizados individualmente e os Mini-Testes aos pares.

Com este Mini-Teste, pretendi avaliar qual o grau de compreensão das equações do 1.º grau e de domínio de procedimentos algébricos os alunos atingiram. Especificamente, pretendi avaliar se os alunos conseguiam classificar corretamente as equações (questão 1), que domínio dos princípios de equivalência foi conseguido (questões 2 e 3), com que grau de correção resolviam equações e apresentavam a sua solução (questão 3) e até que ponto os alunos já eram capazes de matematizar situações, traduzindo problemas para linguagem algébrica (questão 4).

A primeira questão apresentava três equações e era solicitado aos alunos que fizessem corresponder cada equação à sua classificação correta. Esta classificação podia ser feita de forma algo informal, ou seja, sem resolver as equações, nomeadamente se, por exemplo, o aluno identificasse que qualquer valor de ‘x’ é solução da primeira equação ‘2x = 2x’ e, por isso, a equação é possível e indeterminada.

Na segunda questão constava uma equação inicial e era solicitado aos alunos que justificassem se alguma de duas outras equações era, ou não, equivalente à equação inicial. A equação que escolhi como primeira hipótese, alínea a), invocou o trabalho realizado ao nível da eliminação do erro de transposição incorreta de termos. A segunda hipótese, alínea b), era uma equação equivalente à que foi enunciada e era obtida desta dividindo os termos da equação por dois.

Na terceira questão solicitava-se a resolução de uma equação, possível e determinada e a indicação da solução da mesma. O trabalho desenvolvido em torno da propriedade distributiva da multiplicação era um pré-requisito para resolver esta equação.

A quarta questão do teste enunciava uma situação vivida pelos amigos Alice e Marco, era solicitado aos alunos que justificassem se alguma das três equações indicadas podia, ou não, traduzir o problema. As três questões que escolhi têm a particularidade de serem bastante parecidas, sendo duas delas equações equivalentes que traduzem corretamente o problema.

3.4.11. Equações III (entrevista)

Por razões éticas, a tarefa que elaborei para a entrevista foi desenvolvida de forma a ser o mais isomorfa possível às tarefas que foram trabalhadas por todos os alunos nas aulas anteriores.

A primeira questão foi concebida para ajudar-me a perceber que aprendizagens e dificuldades eram reveladas pelos alunos na identificação de equações impossíveis.

A segunda questão desta tarefa é isomorfa à segunda questão do Mini-Teste, e com ela, procurei perceber de que forma os alunos aplicavam os princípios de equivalência e se tinham superado, ou não, os erros de adição de termos não semelhantes e de transposição de termos.

A terceira questão, tal como ocorreu no Mini-Teste, solicitava a resolução de uma equação, resolução essa que tinha como pré-requisito a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação. A solução da equação foi igualmente pedida, isto para eu poder perceber qual o significado que os alunos atribuíam à solução da equação.

Na quarta questão foi solicitado aos alunos que traduzissem para linguagem algébrica uma situação que envolvia os amigos Alice e Marco e que identificassem, nesse contexto, o que representava a incógnita. Com esta questão procurei perceber qual a capacidade adquirida pelos alunos para representar simbolicamente situações, qual o significado que atribuíam à incógnita, abreviatura ou valor a descobrir e que compreensão revelavam ao nível do papel que o sinal de ‘=‘ desempenha nas equações.

3.5. Aulas lecionadas

Seguidamente, apresento uma breve descrição de cada aula que lecionei, Aula 1 a Aula 8. Em todas as aulas os alunos trabalharam aos pares e as aulas foram segmentadas em diferentes momentos, nomeadamente os momentos de introdução, de trabalho autónomo, de discussão coletiva e de síntese. A generalidade das aulas que lecionei iniciou-se com o pedido aos alunos de que se sentassem e retirassem o material de escrita, isto acompanhado de um – bom dia, seguindo-se a explicação do trabalho que seria desenvolvido pelos alunos e em quanto tempo. Após esta introdução, foi distribuída um enunciado de uma tarefa a cada par de alunos e iniciou-se o trabalho autónomo. No final de cada aula as tarefas foram recolhidas e fotocopiadas para, na aula seguinte, entregar a cada aluno de cada par, o original da tarefa ou a cópia respetiva.

Na descrição que apresento, são identificados os objetivos de cada aula e em que medida os mesmos foram concretizados, serão igualmente abordadas as aprendizagens manifestadas e quais as dificuldades sentidas pela generalidade dos alunos. As tarefas e planos de aula utilizados encontram-se nos anexos deste documento.

3.5.1. Aula 1 – 18 de fevereiro de 2016

A primeira aula da minha intervenção teve a duração de 45 minutos e tive como objetivos para esta aula a identificação de monómios semelhantes e a simplificação de expressões algébricas.

Para concretizar os objetivos enunciados concebi a tarefa AlfaZoo, tendo solicitado aos alunos que, nos primeiros 20 minutos da aula, resolvessem autonomamente as três primeiras questões da tarefa, para depois as discutirmos em grupo turma. Durante o trabalho autónomo, verifiquei que a generalidade dos alunos conseguiu resolver corretamente as duas primeiras questões da tarefa. Os alunos somaram o número de animais de cada espécie, tendo sido aproveitadas estas somas para no momento de discussão, sugerir aos alunos a existência de animais "semelhantes", desta forma conseguiu-se uma introdução pacífica do conceito de termos semelhantes. Também constatei que na questão 2, a maioria dos alunos conseguiu identificar que a Alice foi juntando os animais de cada espécie até obter o total de cada espécie. Na questão 3, houve bastante riqueza nas produções dos alunos, não só porque conseguiram identificar parte significativa das expressões falsas, mas também porque adicionaram termos não semelhantes, proporcionando assim oportunidade para trabalhar este tipo de conceção errónea no momento da discussão.

A discussão coletiva e a síntese de ideias ocorreram nos últimos 15 minutos da aula e, no início deste segmento de aula, entreguei a cada par de alunos um verso do enunciado da tarefa, onde constava a questão 3 e o enunciado do TPC. Isto para que cada aluno ficasse com uma folha que tinha a questão 3 e o enunciado do TPC. Solicitei então aos alunos que passassem, cada um para a sua folha, o que fosse escrito no quadro relativamente à questão 3 e que entregassem o TPC na aula seguinte. Este segmento de aula foi um pouco dirigido por mim, isto para “garantir” que os alunos ficassem com as ideias clarificadas e com apontamentos que os ajudassem na realização do primeiro TPC que lhes destinei. Assim, colocando-me junto ao quadro, escolhi uma aluna, que habitualmente participava pouco e que vinha revelado bastantes dificuldades, para apresentar à turma a resolução da questão 1 que fez com o seu par. Este par de alunos somou corretamente os animais de cada espécie mas, quando escrevi no quadro a sua produção, os colegas identificaram que a ordem apresentada não era a ordem crescente que pedia o enunciado, tendo eu corrigido o que estava escrito no quadro. Na discussão da questão 2, após já ter escrito no quadro as expressões da Alice que constavam no enunciado, pedi a uma aluna que fosse escrever no quadro o significado de cada expressão da Alice. Esta aluna foi selecionada devido à clareza da sua resolução e à forma correta como habitualmente comunicava matematicamente. A fase de maior riqueza ocorreu na discussão da questão 3, isto porque pudemos explorar o erro de adição de termos não semelhantes. Para a clarificação deste erro, foi muito importante utilizar no enunciado da tarefa letras que abreviavam espécies de animais, tendo surgido na discussão entre alunos que não podemos adicionar golfinhos a ursos, pois não existem “gursos”. Este segmento de aula foi concluído com a síntese de ideias que constam no quadro existente no enunciado da questão 3 (ver figura 4).

Manual: Volume III
Página 7

- Termos da expressão
- Parte literal
- Coeficiente numérico
- Termos semelhantes

Figura 4 – Síntese de conceitos da tarefa AlfaZoo

Em termos globais penso que os objetivos desta aula foram satisfatoriamente atingidos, nomeadamente porque os alunos conseguiram utilizar símbolos para designar espécies de animais, conseguiram adicionar termos semelhantes e conseguiram, na sua maioria, perceber que não podemos adicionar termos não semelhantes isto é, neste caso, que não se referem à mesma espécie de animal, antecipando-se assim o trabalho relativo à superação da dificuldade de adição de termos não semelhantes. Em termos da gestão de tempo, não foi possível discutir as três últimas alíneas da questão 3, tendo essa discussão ocorrido no início da aula seguinte. Os alunos evidenciaram dificuldades com a inexistência, escrita, do coeficiente em monómios de coeficiente 1, ou seja, 1g = g. Tiveram dificuldade na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação nas três últimas alíneas da questão 3 e tiveram dificuldades iniciais na redução de termos semelhantes.

3.5.2. Aula 2 – 19 de fevereiro de 2016

A segunda aula da minha intervenção iniciou-se com a discussão das três últimas alíneas da questão 3 da tarefa AlfaZoo. Esta foi a primeira oportunidade para confrontar os alunos, com a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em expressões algébricas.

Passados 15 minutos após o toque de entrada, foi distribuída e apresentada aos alunos a tarefa Férias de Carnaval. Esta tarefa foi concebida visando trabalhar os objetivos de resolução de equações simples, estabelecimento da noção de incógnita e seu significado no contexto da tarefa, tradução algébrica de problemas, princípios de equivalência e noção de equação.

Para a fase de trabalho autónomo, indiquei aos alunos que dispunham de 30 minutos para responder às quatro questões da tarefa. No decorrer desta fase, como habitualmente, circulei pela sala e fui acompanhando de perto o trabalho dos alunos. Detetei que os alunos não revelaram grandes dificuldades na resolução das equações da primeira questão e conseguiram, na sua generalidade, associar as equações da questão 2 aos enunciados respetivos da questão 1. Nesta questão, detetei dificuldades ao nível da identificação da incógnita, tendo os alunos interpretado as incógnitas como elementos designativos e não como quantidades ou valores desconhecidos, ou seja, indicaram por exemplo que G representava as gomas e não o custo em euros das gomas adquiridas. Esta dificuldade voltou a estar patente na questão 3, havendo vários alunos que identificaram a incógnita ‘x’ com o número de bolos e não com o peso, em gramas, de um bolo. Ainda na questão 3, a tradução da situação da primeira balança para linguagem algébrica não foi conseguida pela maioria dos alunos e a noção de equilíbrio entre os pratos das balanças revelou-se igualmente problemática. Relativamente à questão 4, os alunos conseguiram desenvolver trabalho de maior correção, houve vários alunos que conseguiram identificar corretamente o resultado das ações efetuadas, ou a efetuar, aos pratos da balança do mestre chocolateiro.

Tendo em conta o trabalho que os alunos desenvolveram no momento de trabalho autónomo, reformulei um pouco aquele que era o meu plano inicial para esta segunda aula da minha intervenção. Optei por não discutir as alíneas c) e d) da questão 3, reservando estas questões para serem incluídas em tarefas seguintes. A discussão das questões 1 e 2 foi célere, durou 10 minutos e contou, por minha solicitação, com a participação de alunos que normalmente sentem mais dificuldades nas aulas de Matemática. Foi dada uma especial atenção ao significado da incógnita no contexto da tarefa e procurei que os alunos conseguissem ultrapassar a questão da utilização das letras meramente como abreviaturas. Aos alunos que indicaram que G representava as gomas, contrapuseram outros alunos que G seria o custo das gomas, tendo eu incentivado esta discussão dado o seu caráter crucial - este era o momento em que os alunos passavam a ser confrontados com letras que, em vez de serem elementos designativos, representam quantidades ou valores desconhecidos. A discussão da questão 4 contou com o auxílio de ilustrações de balanças que desenhei no quadro, tendo desafiado os alunos a descrever o que acontece a uma balança em equilíbrio quando retiramos ou colocamos algo nos seus pratos.

Em termos de concretização dos objetivos para esta aula, a resolução de equações simples foi conseguida, a noção de incógnita e seu significado no contexto da tarefa continuou a necessitar de ser trabalhada, a tradução algébrica de situações não foi conseguida, os princípios de equivalência foram satisfatoriamente trabalhados na questão 4 e a noção de equação foi informalmente preparada com a noção de equilíbrio entre os dois pratos de uma balança. Pese embora esta noção tenha ficado ainda numa fase embrionária para alguns alunos, os quais afirmaram, com alguma razão, que se tirarmos a mesma quantidade a ambos os pratos de uma balança esta "fica mais leve", outros houve que responderam que a balança manter-se-ia equilibrada, sempre que puséssemos ou tirássemos quantidades iguais aos pratos da balança e que ficaria desequilibrada se essas quantidades fossem diferentes.

3.5.3. Aula 3 – 23 de fevereiro de 2016

A terceira aula da minha intervenção foi a primeira que ocorreu na sala dos computadores, tendo sido a primeira vez que os alunos trabalharam com o programa computacional *Solver*. Antes do início da aula, os computadores foram ligados, foi aberto em cada um deles o programa *Solver* e foi iniciada a gravação via *software BB FlashBack* do desenvolvimento das produções de 6 pares de alunos previamente escolhidos, esta gravação ocorreu via captura de ecrãs. Estes procedimentos preparatórios ocorreram nas três aulas realizadas na sala de computadores e incluíram a colocação de uma cópia da tarefa a realizar junto a cada computador.

A aula em referência teve a duração de 90 minutos e os objetivos que pretendi alcançar com os alunos foram: a resolução de equações do 1.º grau, a tradução algébrica de problemas e a compreensão do significado da incógnita.

Esta aula teve a particularidade de ter tido um momento de introdução relativamente longo, isto porque optei por resolver com os alunos duas equações antes de se iniciar o momento do trabalho autónomo. Esta opção resultou da reflexão que fiz com o meu colega de mestrado, o qual, no dia anterior, tinha trabalhado com a sua turma esta mesma tarefa, tendo os seus alunos sentindo-se um pouco perdidos com a interação com o programa *Solver*. Assim, nos primeiros 30 minutos de aula, os alunos foram distribuídos pelos computadores e projetei no quadro a folha de cálculo 0.1 do *Solver* 1 cuja ilustração apresento de seguida.

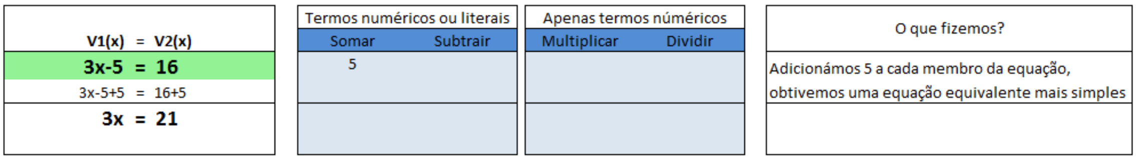


Figura 5 – Solver 1, folha de cálculo 0.1.

Esta folha de *Excel*, tal como a seguinte, tinha uma equação que resolvemos em grupo recorrendo à analogia das balanças. Fui então perguntando aos alunos, o que deveríamos fazer ao conteúdo dos pratos da balança imaginária para descobrir o valor da incógnita que era solução da equação. Para participar na discussão, selecionei alunos que colocavam o braço no ar e alunos que, não o fazendo, quis que também se envolvessem na discussão. Mediante as sugestões dadas pelos alunos, fui introduzindo nas células do *Excel* os valores sugeridos, esta dinâmica permitiu explorar alguns erros como retirar ‘3’ a ‘3x’ para obter ‘x’. Os alunos puderam então verificar que o *Solver* devolveu uma equação equivalente na qual, no lugar de ‘3x’, apareceu ‘3x-3’ ao invés de ‘x’ que era o pretendido. Após a resolução desta equação, e descoberto o valor de ‘x’, resolvemos uma segunda equação e, em ambas, escrevi nas linhas “o que fizemos” quais as operações realizadas aos termos das equações.

Realizada a introdução ao *Solver,* a aula teve um segundo segmento de 30 minutos onde os alunos resolveram, aos pares, a tarefa Aluno X. Seguidamente procedeu-se à discussão das questões da tarefa e foi feita a síntese de conceitos. Esta síntese incluiu a definição de equação como igualdade entre duas expressões com pelo menos uma incógnita, a definição de membros da equação, a definição do que é a solução de uma equação e o que são princípios de equivalência.

Uma vez que os alunos, na fase de trabalho autónomo, revelaram especiais dificuldades na resolução das questões 2 e 3, optei por focar a discussão nas restantes questões, concretizando assim o objetivo de resolução de equações através da aplicação dos princípios de equivalência. Desta forma, os objetivos da tradução algébrica de problemas e a compreensão do significado da incógnita, ficaram para concretizar em aulas seguintes. As questões 2 e 3, relativas à concretização destes objetivos, foram reformuladas e recuperadas na elaboração da tarefa Equações I. Esta tarefa foi trabalhada na Aula 5 da minha intervenção, a qual ocorreu igualmente na sala de computadores. Focado o trabalho nos procedimentos de resolução de equações, os alunos revelaram uma boa capacidade em identificar quais as operações que foram realizadas pelo Aluno X, por forma a obter equações equivalentes mais simples (questão 1) e conseguiram, na sua generalidade, resolver as equações da questão 5.

3.5.4. Aula 4 – 25 de fevereiro de 2016

Esta aula teve a duração de 45 minutos e os seus objetivos foram a tradução algébrica de problemas, o estudo dos princípios de equivalência e o significado da incógnita e dos termos de equações nos contextos enunciados. As atividades desta aula desenvolveram-se em torno da tarefa Guloseimas para a Páscoa, os primeiros 30 minutos da aula foram dedicados à introdução da tarefa e à realização de trabalho autónomo. Os últimos 15 minutos da aula foram destinados à discussão, em grupo turma, das propostas de resolução dos alunos e à síntese das ideias principais, as quais foram por mim escritas no quadro.

Uma vez que na aula anterior as atividades desenvolvidas centraram-se mais nos procedimentos de resolução de equações, esta foi uma aula em que procurei que os alunos desenvolvessem compreensão sobre os conceitos envolvidos no estudo das equações. Esta estratégia visou o desenvolvimento de uma aprendizagem com compreensão.

Quer no momento de trabalho autónomo, quer no momento de discussão coletiva, pude aperceber-me que os alunos tiveram dificuldades em identificar o significado das incógnitas no contexto da tarefa, desta forma o significado dos termos foi erroneamente atribuído, o mesmo acontecendo com a tradução de enunciados por meio de equações. Para muitos alunos, ‘18g’ significou 18 gomas, ao invés de 18 pacotes de gomas. Daqui emergiu, na fase de síntese de ideias, o reforçar da ideia de que uma incógnita é uma quantidade ou valor que queremos descobrir e não uma abreviatura.

Foi interessante observar que, já nesta aula, grande parte dos alunos conseguiu identificar, na questão 2 alínea b), quais das equações listadas eram equivalentes à equação '7 + p = 5 + 2p' do enunciado. Da avaliação que fiz às produções e intervenções dos alunos, pude constatar que, nesta fase, os procedimentos de resolução de equações estavam melhor assimilados do que a compreensão do significado da incógnita ou dos termos da equação, ficando desta forma limitada a possibilidade de identificar que equação traduzia a situação enunciada. Assim, optei por privilegiar na discussão e síntese a compreensão destes significados, ficando a questão 3 da tarefa, relativa à resolução de duas equações, adiada para as aulas e tarefas seguintes.

3.5.5. Aula 5 – 01 de março de 2016

Na Aula 5, voltámos à sala dos computadores e desenvolvemos atividades com recurso ao programa computacional *Solver* e, para o efeito, preparei a tarefa Equações I. Os objetivos principais para esta aula foram, a tradução algébrica de problemas, o significado da solução das equações no contexto da tarefa, a aplicação dos princípios de equivalência e a classificação de equações.

Na fase de introdução da tarefa, pedi aos alunos que lessem atentamente o enunciado da tarefa e que verificassem que a primeira alínea da primeira questão da tarefa continha três enunciados e que a cada um deles haveria de corresponder a uma das equações constantes nas folhas de cálculo 1, 2 e 3 do *Solver*. E que após identificarem as correspondências corretas, deveriam encontrar, com recurso ao *Solver*, a solução de cada uma das equações, isto para responderem à segunda alínea da questão.

No momento do trabalho autónomo acompanhei as produções dos alunos e escutei as suas questões às quais respondi, na maioria dos casos, com perguntas que redirecionassem os seus raciocínios. Algumas das questões que coloquei aos alunos com alguma frequência foram "o que é uma incógnita?", "o que queremos descobrir?", "o que representa o 'x'?". Desta forma procurei dar seguimento ao trabalho feito nas aulas anteriores e garantir que os alunos conseguiam clarificar que, a incógnita é um valor que queremos descobrir e não uma abreviatura. Conseguida esta clarificação, os alunos revelaram desenvoltura na identificação das correspondências entre equações e os enunciados dados, o mesmo acontecendo com a interpretação das soluções encontradas. Relativamente à resolução das equações, os alunos continuaram a revelar algumas dificuldades, dificuldades essas que foram um pouco atenuadas com o *feedback* fornecido pelo *Solver*.

O recurso ao programa computacional *Solver* ajudou a focar os alunos nas operações a que deveriam recorrer (multiplicação, divisão, adição e subtração), realizando o programa, de forma automática, a operação escolhida pelos alunos em ambos os membros da equação. Desta forma, foi limitada a ocorrência de erros de cálculo ao nível da redução de termos semelhantes e ao nível da aplicação dos princípios de equivalência. A utilização do programa limitou também a ocorrência de erros ao nível da utilização do sinal, isto porque após os alunos escolherem uma operação, o programa apresentava de forma automática a equação equivalente respetiva, na qual o símbolo de igual tinha esse sentido indicador de equilíbrio entre os dois membros da equação. Na utilização do *Solver*, não existe a possibilidade de o aluno utilizar o símbolo de igual como sequencial tal como acontecia na Aritmética. Por outro lado, o programa forneceu *feedback* automático, nomeadamente quando os alunos tentavam eliminar um coeficiente numérico de um monómio ‘ax’, subtraindo-lhe o coeficiente ‘a’. Nestes casos, os alunos obteriam ‘ax-a’ ao invés do desejado ‘x’ e eram desafiados a voltar atrás e a encontrar a operação que efetivamente conduzia à obtenção de uma equação mais simples.

A limitação de erros proporcionada pelo *Solver* poderia igualmente significar uma limitação da exploração proposta e da compreensão dos alunos dessa exploração, na medida em que houve erros que não chegaram a ser cometidos e que não foram discutidos nesta aula, porém nas aulas seguintes, os alunos trabalharam sem o programa computacional *Solver* e a exploração dos erros mencionados acabou por ocorrer.

Uma dificuldade prevista, e que achei que seria interessante explorar com os alunos, manifestou-se na resolução das equações indeterminadas e impossíveis (questão 2). Alguns alunos disseram que se tínhamos ‘x = x’, a equação tinha muitas soluções, ou que se obtínhamos ‘3x = 3x-4’ não dava para resolver. Estas conjeturas permitiram enriquecer bastante o momento de discussão que se seguiu e foram a ponte que me permitiu sintetizar os conceitos de equação possível, equação possível e indeterminada e equação impossível. Também na discussão coletiva, foi possível capitalizar o facto de alguns alunos não terem resolvido as cinco equações da questão 3, isto para descobrirem quais delas tinham solução 2. Desta forma, foi reforçada a importância do processo de verificação da solução das equações que fui “sugerindo” no segmento de aula de trabalho autónomo. As minhas sugestões concretizaram-se com questões do tipo: “o x da equação da folha de cálculo 1 pode ser dois? E três? E quatro?”, “a solução da equação da folha de cálculo 2 pode ser cinco? Porquê?”. Coloquei igualmente questões relativas às equações impossíveis e indeterminadas das folhas de cálculo 4 e 5 tais como: “ se x = x a solução da equação pode ser um? E dois? E mil?”, “se 3x = 3x – 4, o x pode ser um? e dois? E pode ser outro valor? Porquê?”. Este questionamento permitiu que alguns alunos evitassem resolver todas as cinco equações da folha de cálculo 6, para verificarem quais delas tinham solução 2.

A classificação de equações foi um objetivo que não foi completamente concretizado nesta aula. A resolução de equações foi globalmente conseguida, a tradução algébrica dos problemas foi feita corretamente pela maioria dos alunos e o significado, no contexto da tarefa, das soluções encontradas ficou a precisar de ser melhor trabalhada.

3.5.6. Aula 6 – 03 de março de 2016

A Aula 6 da minha intervenção teve a duração de 45 minutos e, à semelhança da Aula 7, foram desenvolvidas atividades em torno da tarefa Mestres e guloseimas. A primeira questão desta tarefa recuperou questões da tarefa da Aula 2 e os objetivos que visei foram igualmente retomados de aulas anteriores, nomeadamente a compreensão do significado da incógnita, a tradução algébrica de problemas e a aplicação dos princípios de equivalência.

Uma vez que os alunos já estavam familiarizados com as balanças do mestre chocolateiro, a aula iniciou-se rapidamente tendo eu desafiado os alunos a resolver as cinco alíneas da primeira questão. Para o trabalho autónomo foram destinados cerca de 25 minutos, seguindo-se uma discussão coletiva e síntese de ideias que durou cerca de 15 minutos.

Quer no segmento de aula referente ao trabalho autónomo, quer no segmento dedicado à discussão coletiva, pude constatar pelas produções dos alunos e pelas suas intervenções, que ainda existiram dificuldades na atribuição de significado à incógnita, no entanto, no momento de discussão, houve alunos que explicaram aos colegas que ‘x’ representava o peso em gramas de um bolo em vez de simbolizar um bolo. Nos argumentos utilizados, os alunos referiram que se cada ‘x’ simboliza-se um bolo, então não haveria nada a descobrir e, nesse caso, ‘x’ não seria uma incógnita.

Relativamente à aplicação dos princípios de equivalência, para discernir quais as operações que permitiam transformar o conteúdo dos pratos de uma balança, no conteúdo dos pratos de outra balança, detetei menos dificuldades. Uma das estratégias que utilizei para superar estas dificuldades, foi questionar os alunos acerca da forma como iriam proceder se estivessem a trabalhar no *Solver*, que operações utilizariam e qual seria o resultado produzido por essas operações. Esta estratégia permitiu que os alunos estabelecessem conexões com o trabalho efetuado nas aulas anteriores, conseguido assim superar algumas das dificuldades relativas à aplicação dos princípios de equivalência.

Em termos globais os objetivos para esta aula foram satisfatoriamente conseguidos.

3.5.7. Aula 7 – 04 de março de 2016

A aula de 4 de março ocorreu no dia seguinte à aula onde se iniciaram as atividades em torno da tarefa Mestres e guloseimas. Esta aula teve a duração de 90 minutos e nela, voltámos a trabalhar o significado da incógnita, a tradução algébrica de problemas, a resolução e a classificação de equações e a verificação da solução das equações.

Após os alunos entrarem na sala e se sentarem nos seus lugares, começaram a trabalhar com o seu par, dando sequência ao trabalho realizado na aula anterior. Este segmento de trabalho autónomo teve a duração de cerca de 50 minutos, ao qual se seguiu uma discussão coletiva alargada, cerca de 30 minutos. Nesta discussão, vários alunos foram ao quadro redigir e discutir com os colegas as suas produções. Nesta discussão as minhas intervenções limitaram-se a moderar e a gerir as participações dos alunos, o restante trabalho foi realizado por eles. As conceções ou resoluções erróneas que se manifestaram tiveram quase sempre como consequência, a intervenção de alunos que corrigiam os colegas e explicavam à turma a forma correta de resolver as questões da tarefa.

As minhas intervenções foram mais acentuadas na fase de desenvolvimento do trabalho autónomo, interagi com praticamente todos os pares de alunos e fui desafiando-os com questões do tipo das que já referi as quais ajudaram a redirecionar os seus raciocínios e a estabelecer conexões com os conceitos e questões que tínhamos trabalhado nas aulas anteriores. Todas as questões da tarefa eram possíveis de serem relacionadas com tarefas já propostas, ou com o trabalho realizado no *Solver*, o que, no meu entender, permitiu aos alunos desenvolverem trabalho de maior qualidade e a argumentarem com maior confiança.

No final da aula foi entregue a cada aluno o enunciado do TPC II e solicitada a sua entrega no inicio da aula seguinte.

Alguns dos objetivos para esta aula não foram conseguidos, nomeadamente porque não chegou a ser trabalhada a questão 3 da tarefa que visava os objetivos de significado de incógnita no contexto da tarefa e tradução algébrica de problemas. Os restantes objetivos previstos foram satisfatoriamente conseguidos, nomeadamente porque na discussão alargada houve vários alunos que apresentaram aos colegas produções e argumentos corretos.

3.5.8. Aula 8 – 08 de março de 2016

A última aula da minha intervenção foi a terceira realizada na sala de computadores, teve a duração de 90 minutos. Após dar os habituais bons dias aos alunos, fiz uma breve introdução à tarefa Equações II, seguiram-se 30 minutos de trabalho autónomo e outros 30 dedicados à discussão coletiva e síntese de ideias. Nas aulas anteriores, o segmento de trabalho autónomo teve sempre uma duração superior ao segmento de discussão e síntese, nesta aula optei por uma discussão e síntese com igual duração ao segmento de trabalho autónomo porque quis "garantir" que seriam eliminadas o máximo de conceções erróneas. Esta preocupação prendeu-se com o facto de ser a última aula da minha intervenção e porque os últimos 25 minutos de aula seriam dedicados à realização de um Mini-Teste.

Foi trabalhada nesta aula a tradução algébrica de problemas, a resolução de equações e sua classificação e a verificação da solução da equação.

Durante o trabalho autónomo, parte significativa dos alunos conseguiu resolver, com recurso ao *Solver*, as três equações da questão 1, tendo sido notado por mim e pelo professor cooperante, um certo à-vontade dos alunos com as operações inversas. A classificação correta das equações também foi satisfatoriamente conseguida e, nas cinco equações da questão 3, houve alunos que optaram por substituir a incógnita por 2, para verificar se seria essa a solução das equações, significando isto que os resultados da discussão da Aula 5 foram capitalizados para esta aula. Em termos de capacidades transversais os alunos revelaram uma apropriação significativa da linguagem formal. As dificuldades mais notadas foram a tradução de problemas para linguagem algébrica, isto na questão 2 da tarefa e a correta classificação das equações tendo em conta a linguagem formal respetiva. Alguns alunos disseram que a equação indeterminada era uma "equação infinita" porque tinha infinitos 'x' que a verificavam. No segmento de aula relativo à síntese de ideias, clarifiquei que as equações podem ser classificadas como possíveis e determinadas, possíveis e indeterminadas e impossíveis. Com habitualmente, as ideias chave da aula foram escritas no quadro e solicitei aos alunos que as escrevessem no caderno ou no enunciado da tarefa.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

A metodologia de recolha de dados que utilizei para investigar as aprendizagens e dificuldades manifestadas pelos alunos, no processo de ensino e aprendizagem das equações do primeiro grau, foram de natureza qualitativa, por esse motivo, a recolha dos dados foi diversificada para possibilitar o seu cruzamento.

Uma das fontes utilizada foi a observação direta dos alunos em contexto de sala de aula, “na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.” (Bogdan & Biklen, 1994, p.47). As folhas de “Registo de aprendizagens e dificuldades”, onde o professor coorientador, o professor cooperante, o colega de mestrado e eu registamos as aprendizagens e dificuldades manifestadas pelos alunos, estiveram sempre presentes para auxiliar e complementar a interpretação dos outros dados que recolhi, constituindo-se assim como elementos fundamentais para a análise das aprendizagens e dificuldades dos alunos.

Os materiais escritos com as produções dos alunos foram recursos igualmente fundamentais e amplamente tidos em conta na minha análise. Analisei as produções dos alunos relativas às tarefas propostas, aos TPC’s que estes realizaram e ao trabalho que desenvolveram em contexto avaliativo (Mini-Teste).

Para analisar o contributo do *Solver* no processo de ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau, procedi à gravação dos ficheiros *Excel* trabalhados pelos alunos e, via *software BB FlashBack,* que efetua captura de ecrãs, gravei o desenvolvimento das produções de seis pares de alunos previamente selecionados. Foi também criado um pequeno questionário que distribui aos alunos no final da minha intervenção, com o qual procurei perceber qual o efeito da utilização do *Solver* nas suas aprendizagens e na sua motivação. Por fim, realizei três entrevistas a três pares de alunos para alargar a diversidade dos elementos recolhidos.

A seleção dos alunos a entrevistar, bem como a seleção dos alunos cujas interações no *Solver* foram gravadas em registo informático, teve em conta os alunos cujas produções seriam, previsivelmente, mais significativas para análise e que mais me poderiam ajudar a compreender o caso, (Stake, 2007). Quer isto dizer que privilegiei a qualidade dos dados em relação à quantidade. Para a gravação das interações com o *software BB FlashBack*, selecionei alunos que, previsivelmente, desenvolveriam trabalho significativo, quer este fosse correto ou não, ou seja, interessou-me recolher dados acerca de pares de alunos que se envolvessem significativamente na resolução das tarefas que foram desenvolvidas para serem trabalhadas com o *Solver*. Para as entrevistas, escolhi três dos seis pares observados, o critério da escolha foi a capacidade comunicativa dos alunos. Refira-se que, tal como referido, todos os pares foram formados por uma aluna e por um aluno com diferentes níveis de saber, este facto também ajudou a aumentar a diversidade dos dados recolhidos.

Tal como referido por Bodgan e Biklen (1994), o interesse pelos dados recolhidos neste estudo qualitativo, não terá como objetivo confirmar hipóteses previamente concebidas, mas sim elaborar conjeturas à medida que os dados forem sendo analisados e agrupados.

4.1. Observação direta

A observação do trabalho dos alunos teve em conta a segmentação de aulas que considerei nos planos de aula. Os momentos de trabalho autónomo foram propícios à recolha de informação pertinente para interpretar as aprendizagens, as dificuldades e as estratégias dos alunos. Nestes momentos estive a circular pela sala, auscultando os alunos e questionando-os em ordem a aceder aos seus raciocínios. Seguidamente, nos momentos de discussão, tive nova oportunidade de compreender os seus raciocínios, dificuldades e estratégias, procurei escutá-los atentamente e compreender os seus argumentos. O registo que efetuei destes momentos ocorreu após o final de cada aula na referida folha "Registo de aprendizagens e dificuldades", isto para ficar com registos do que experienciei em cada momento de investigação (Bodgan & Biklen, 1994).

4.2. Recolha e análise documental

As tarefas desenvolvidas para as aulas lecionadas foram entregues aos pares de alunos no início de cada aula e foram trabalhadas por estes quer em ficheiros *Excel*, quer nas folhas dos enunciados das tarefas. No final de cada aula, copiei os ficheiros de *Excel* produzidos pelos alunos e recolhi as produções que realizaram nos enunciados das tarefas para as fotocopiar. O mesmo aconteceu com os TPC's e com o Mini-Teste realizado na última aula. Efetuadas as cópias documentais, os originais foram devolvidos aos alunos na aula seguinte para não comprometer o estudo dos alunos. Como mencionado, foi gravado com recurso ao *software BB FlashBack* o trabalho realizado nos computadores por seis pares de alunos, adiante designados como Par 1, Par 2, Par 3, Par 4, Par 5 e Par 6. Estes ficheiros foram copiados e forneceram-me dados audiovisuais que enriqueceram a análise efetuada. Relativamente aos questionários, os mesmos também foram recolhidos para análise.

4.3. Entrevistas

As entrevistas realizadas aos três pares de alunos selecionados, foram gravadas em registo áudio e ocorreram fora do horário da aula de Matemática, isto para não prejudicar a sua aprendizagem. Para evitar que os alunos ficassem mais tempo na escola do que aquele que lhes é habitual, tive em conta o período em que estes normalmente permanecem no recinto escolar para almoçar. Assim, as entrevistas foram marcadas para um momento posterior à última aula da manhã, isto no dia 8 de março, perto da hora do almoço. A duração de cada entrevista não excedeu os 30 minutos e com elas procurarei recolher mais informação que me ajudasse a compreender os raciocínios, as aprendizagens e as dificuldades dos alunos. Desta forma procurei complementar a análise das observações diretas e dos registos documentais ou informáticos.

Tendo em conta as dificuldades que os alunos foram revelando de forma mais generalizada e que, por isso, foram mais trabalhadas na sala de aula, desenvolvi para a entrevista a tarefa Equações III. Esta tarefa recuperou questões trabalhadas em momentos anteriores e, por questões éticas, foi composta por questões muito semelhantes às que tinham sido colocadas no Mini-Teste, isto para evitar desigualdades. Na entrevista, a resolução da tarefa foi acompanhada de diálogo com os alunos no qual coloquei questões como "explica-me como pensaste?", "porque podemos resolver assim?", "conseguem fazer um esquema ou ilustrarem como estão a pensar?" ou "conseguem relacionar o vosso raciocínio com o que fizeram no *Solver*?", isto com o intuito de aceder aos seus raciocínios e estratégias. Procurei aferir que noções algébricas foram conseguidas, quais as que permaneceram dúbias ou incompreendidas e quais os contributos que o uso da tecnologia teve para a aprendizagem dos alunos.

Como as entrevistas foram realizadas em simultâneo com a resolução da tarefa Equações III, foram produzidos dados relativos às resoluções dos alunos nos enunciados, relativos às notas retiradas por mim e relativos a dois ficheiros áudio obtidos na minha interação com os alunos. A gravação áudio da interação com o Par 4 não foi conseguida por motivos técnicos.

5. Análise dos dados recolhidos

Com a análise dos dados que se segue, procuro espelhar as respostas que encontrei às perguntas inicialmente formuladas para o trabalho de cariz investigativo. Assim, irei destacar aquelas que me parecem ser evidências significativas das aprendizagens realizadas pelos alunos, das dificuldades que sentiram e do contributo do *Solver* como um fator facilitador da aprendizagem. Para isso recorrerei a ilustrações das produções dos alunos realizadas na sala de aula, em TPC e nas entrevistas. Os ficheiros *Excel* recolhidos, as capturas de ecrãs obtidas, a transcrição de excertos dos diálogos gravados nas entrevistas, as folhas de "Registo de aprendizagens e dificuldades" e os questionários a que os alunos responderam, serviram também para o mesmo efeito.

Na análise dos dados, procurei minimizar os riscos de enviesamento dos mesmos, nomeadamente solicitando aos alunos que o que passassem do quadro para os enunciados das tarefas fosse escrito com material de escrita diferente, o que nem sempre aconteceu, portanto em caso de dúvida privilegiei sempre as produções que continham erros. Foram também eliminados da minha análise dos TPC's, as produções que não continham erros, isto porque poderiam não ter sido realizadas autonomamente pelos alunos. O conhecimento que tenho dos elementos da turma também me auxiliou a eliminar dados que, previsivelmente, não teriam sido produzidos pelos próprios. Na análise dos ficheiros produzidos pelo *software BB FlashBack*, desconsiderei os últimos minutos das filmagens, isto porque coincidiram com os momentos de discussão e síntese das tarefas, portanto as alterações feitas aos ficheiros do *Solver* nessa fase previsivelmente diriam respeito ao que foi escrito ou projetado no quadro, ou ao que foi transmitido oralmente. Como referi, os seis pares de alunos cujas interações com o *Solver* foram gravadas serão designados como Par 1 até Par 6.

As entrevistas foram realizadas ao Par 4, Par 5 e ao Par 6.

5.1. Análise das dificuldades

Algumas das dificuldades detetadas na resolução das equações do 1.º grau, encontram-se tipificadas, (ver tabela 1) por Kieran (citado em Ponte, Branco & Matos, 2009). Dessas serão destacadas aquelas que foram mais generalizadas e persistentes. Destaco igualmente outro tipo de dificuldades que fui detetando e que considerei relevantes por terem sido sentidas por parte significativa dos alunos da turma, nomeadamente as dificuldades relacionadas com a compreensão do significado da incógnita, ou com a classificação das equações, entre outras.

5.1.1. Adição incorreta de termos não semelhantes

A adição incorreta de termos não semelhantes foi um erro notado logo nas primeiras aulas da minha intervenção e que foi persistindo ao longo das aulas posteriores. Na figura seguinte ilustra-se a produção de um aluno referente à alínea c) da tarefa TPC I (ver figura 6).

c) $x + 2x + y + 2y = 6xy$

Figura 6 – TPC I, alínea c), adição incorreta de termos não semelhantes.

Podemos verificar que nesta questão o aluno adicionou os coeficientes de todos os monómios, semelhantes ou não e "juntou" as suas partes literais originando um novo monómio que não é igual à soma dos quatro monómios da expressão.

Analisando os vídeos referentes às produções dos alunos na resposta à questão 5 da tarefa Aluno X, a qual solicitava a resolução de duas equações, verifico que o Par 2 procura somar '5' ao monómio '-5x' para obter 'x' (ver figura 7).

Figura 7 – Aluno X, questão 5, Par 2.

Também foram verificadas, em outros pares, tentativas semelhantes à ilustrada, o Par 1 começou por subtrair '-5' à expressão '-5x+10' e o Par 3 tentou subtrair '5' a '5x'.

A dificuldade na adição de termos da equação também foi verificada na resolução da questão 1 da tarefa Equações II. Neste particular destaco o Par 6 que, aparentemente, teve como primeira tentativa para resolver a equação desta questão somar termos não semelhantes, ou seja, tentou somar '3' a '-3x' para fazer "desaparecer" o 'x' do segundo membro da equação (ver figura 8). Após várias tentativas e recomeços, este par optou por adicionar '3x' à equação e a partir de então conseguiu resolver a equação.

	Termos numéricos ou literais		Apenas termos numéricos	
V1(x) = V2(x)	Somar	Subtrair	Multiplicar	Dividir
3x-4 = 14-3x 3x-4+3 = 14-3x+3	3			
3x-1 = -3x+17 3x-1+1 = -3x+17+1	1			
3x = -3x+18 3x+(-18) = -3x+18+(-18)		18		
3x-18 = -3x				

Figura 8 – Equações II, questão 1, Par 6.

Na entrevista realizada, também pude verificar que os alunos cometeram o erro da adição de termos não semelhantes, tendo estes sugerido retirar ‘3’ a ‘3x’ para resolver a equação ‘3x = 1’ da questão 1 da tarefa Equações III. Veja-se por exemplo os excertos seguintes nos quais os intervenientes serão sempre identificados da seguinte forma: ‘A’ identifica a aluna do par, ‘O’ identifica o aluno do par e eu serei identificado por ‘H’:

Par 5 questão 1:

H: E a primeira equação [9x = 3] é impossível?

A: Acho que sim porque não há nenhum número que multiplicado por 9 dê 3.

H: E tu?

O: Também

H: Conseguem resolver esta equação?

A: Não… [pensa um pouco] sim, consegue-se, dividimos por 3 e fica 3x = 1, temos de tirar o 3.

H: Se tivessem no computador o que faziam?

A: Tirávamos o 3.

H: Com que operação?

O: Menos 3.

A: Aqui vai dar -2 [segundo membro] e aqui dá x [primeiro membro], fica x = -2.

Par 6 questão 2:

H: Alguma das equações é equivalente à equação 2x+4 = 10+2x?

A: A da alínea a) [6x = 12x] é, porque 2x+4 é 6x. No segundo membro dá 10+2x que é 12x.

Estes excertos revelam que os alunos manifestam ter dificuldade em lidar com termos que contêm a incógnita, subtraem os coeficientes a esses termos para “isolar” a incógnita e somam os coeficientes dos termos, independentemente de estes terem ou não parte literal.

5.1.2. Interpretação incorreta de monómios do 1.º grau

No trabalho desenvolvido pelos alunos em relação à tarefa Equações I é verificável que dos seis pares de alunos observados, três revelaram dificuldades na resolução das três primeiras equações possíveis e determinadas. Estas dificuldades emergiram quando os alunos, após subtraírem à equação o termo independente do primeiro membro, verificaram que a incógnita ‘x’ continuava presente em ambos os membros (ver figura 9, 1.º exemplo). Após alguns minutos o Par 5 chega mesmo a desistir da resolução da primeira equação e, após tentar resolver a segunda e a terceira equações, acaba igualmente por desistir. Este par é constituído por um aluno com nível 3 e uma aluna do quadro de honra.

O Par 2, realizou um processo idêntico mas, após várias tentativas de resolução das três equações, acabou por experimentar subtrair ‘1x’ aos membros da primeira equação e, tendo conseguido uma equação mais simples, acabou por resolver a equação e, com maiores ou menores dificuldades, acaba também por conseguir resolver as outras duas questões, descobrindo assim que pode retirar ‘1x’ aos membros da equação (ver figura 9, 2º exemplo).

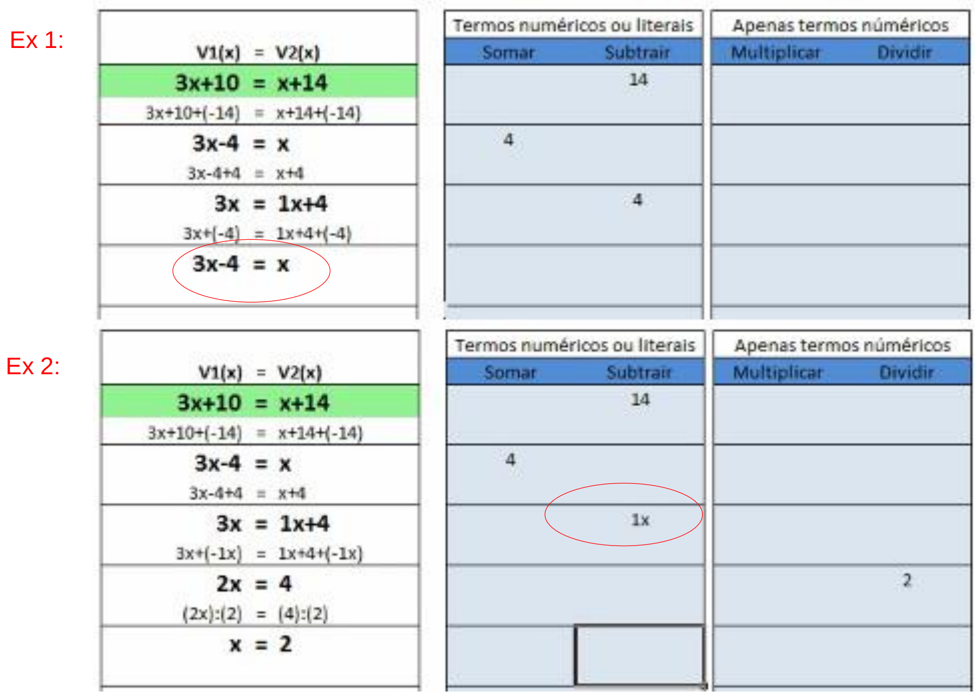


Figura 9 – Equações I, questão 1, Par 2.

A dificuldade manifestada pelos alunos que acabo de ilustrar relaciona-se, na minha opinião, com a dificuldade de interpretar corretamente os monómios do 1.º grau. Isto porque estou em crer que para estes alunos, para além da dificuldade que acarreta lidar e operar com letras e números, retirar ‘x’ à equação significaria retirar a letra ficando apenas o coeficiente respetivo, isto é, subtrair ‘x’ à equação ‘3x-4 = x’ teria como resultado ‘3 – 4 = ‘.

Na análise às filmagens dos alunos relativas à resolução da tarefa Equações II, o Par 5 também evidenciou este tipo de dificuldade na interpretação do monómio ‘1x’ (ver figura 10), é possível que tenha interpretado este monómio como uma dezena e um número desconhecido de unidades, e por isso, como é visível nas filmagens, hesitou bastante antes de subtrair ‘1x’ à equação que o *Solver* forneceu no 3.º passo da resolução. Desta forma este par demorou consideravelmente mais tempo que os outros pares observados para resolver esta equação.

Figura 10 – Equações II, questão 1, Par 5.

5.1.3. Uso incorreto de parêntesis

O uso incorreto dos parêntesis manifestou-se essencialmente nas primeiras aulas da minha intervenção. Na resolução do TPC I, muitos foram os alunos que acabaram por não resolver a alínea g) da tarefa a qual solicitava a simplificação da expressão ‘3(x+2y)’ o que indicia uma dificuldade generalizada na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação. Esta dificuldade já tinha sido detetada quando, no início do ano letivo, procedemos à revisão das operações. Já na resolução do TPC II, somente dois alunos não conseguiram usar corretamente os parêntesis na resolução de equações, apresento de seguida as ilustrações respetivas.

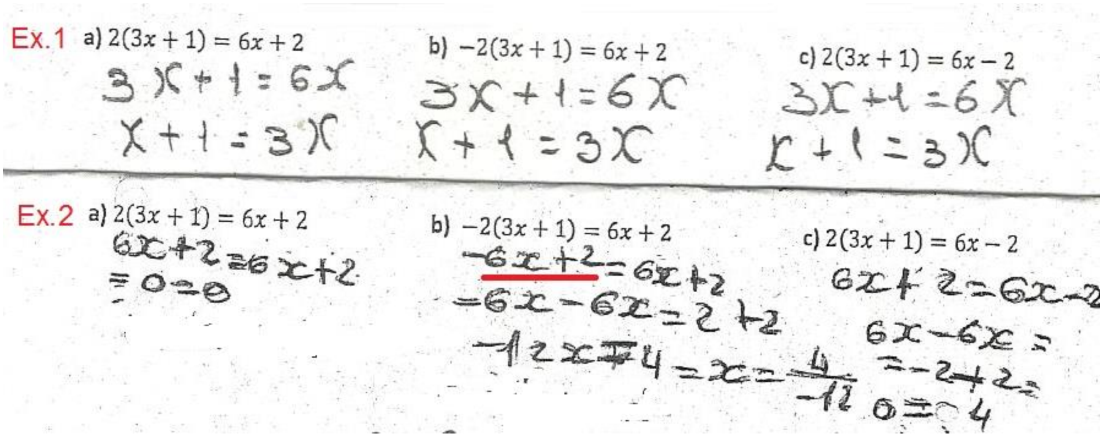


Figura 11 – TPC I, alínea g).

No primeiro exemplo da figura anterior, a aluna não aplica a propriedade distributiva e elimina o fator ‘2’ (ou -2) do primeiro membro da equação em questão, isto juntamente com o termo independente ‘2’ (ou ‘-2’) que aparece no segundo membro da equação. No segundo exemplo, de outra aluna, a aplicação da propriedade distributiva só ocorreu na equação da alínea b), esta aluna multiplicou corretamente ‘-2’ por ‘3x’ mas “escapou-lhe” o sinal ‘-’ ao multiplicar ‘-2’ por ‘1’.

5.1.4. Adição incorreta de termos semelhantes

Analisando as produções dos alunos referentes ao período que compreende as duas primeiras aulas da minha intervenção, a tarefa TPC I é aquela que melhor espelha uma das dificuldades que nesta fase era comum a praticamente todos os alunos, a adição de termos semelhantes (ver figura 12).

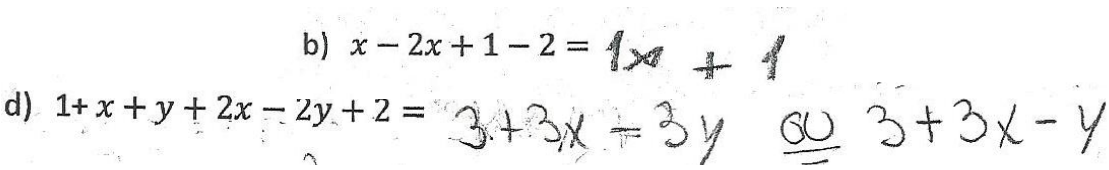


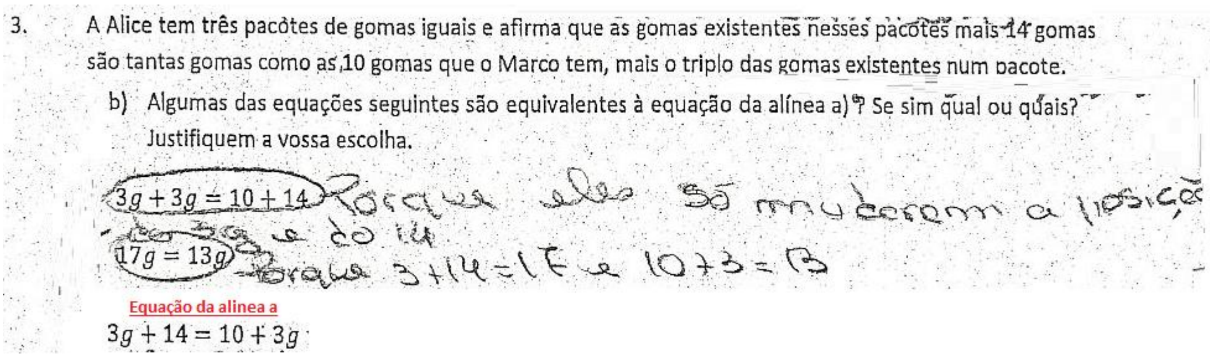
Figura 12 – TPC I, questão 1.

Nesta tarefa era pedida a simplificação de oito expressões algébricas, na resolução da alínea b), o aluno subtraiu ‘1x’ a ‘2x’e procedeu de igual forma com os termos independentes, ou seja subtraiu ‘1’ a ‘2’. Noto aqui um indício que o aluno tinha algumas incertezas relativamente às operações aritméticas, nomeadamente quando estavam presentes números negativos. Esta dificuldade também já tinha sido detetada no início do ano letivo, aquando da revisão destas operações. Observa-se portanto uma transposição das dificuldades sentidas no estudo da Aritmética para o estudo da Álgebra.

A resolução da alínea d) foi realizada por uma aluna e, neste caso, verifica-se também uma dificuldade na adição de monómios com sinais diferentes. Verificamos que a aluna adiciona corretamente, os termos independentes e os monómios com incógnita ‘x’, mas o mesmo não acontece com os monómios da incógnita ‘y’ que têm sinais diferentes. Para lidar com a situação, a aluna apresenta duas propostas de resolução, uma incorreta em que soma o valor absoluto dos coeficientes de ‘y’ e coloca o resultado como negativo (possivelmente pensou “mais com menos dá menos”) e outra proposta em que adiciona os termos semelhantes de forma correta.

5.1.5. Transposição incorreta de termos

A transposição de termos de um membro da equação para o outro foi uma dificuldade manifestada por parte dos alunos, segue-se um exemplo desse tipo de dificuldade referente à questão 3 da tarefa TPC II (ver figura 13).


3. A Alice tem três pacotes de gomas iguais e afirma que as gomas existentes nesses pacotes mais 14 gomas são tantas gomas como as 10 gomas que o Marco tem, mais o triplo das gomas existentes num pacote.

b) Algumas das equações seguintes são equivalentes à equação da alínea a)? Se sim qual ou quais? Justifiquem a vossa escolha.

$3g + 3g = 10 + 14$ Porque eles só mudaram a posição ~~do 3g~~ e do 14

$17g = 13g$ Porque 3+14=17 e 10+3=13

Equação da alinea a

$3g + 14 = 10 + 3g$

Figura 13 – TPC II, questão 3, transposição incorreta de termos e adição incorreta de termos não semelhantes.

Observando as justificações do aluno, verifica-se que ele considerou a primeira equação da alínea b) equivalente à da alínea a) porque alguns dos termos "só mudaram de posição" (refere-se a 14 e a um dos 3g), o que mostra que não se apropriou dos princípios de equivalência. Na segunda justificação, percebe-se que o aluno considera que a equação é equivalente à da alínea a) porque considera que '17g' se obtém de '3g+14' e '13g' de '10+3g', mostrando que ainda não compreendeu que só se podem adicionar termos semelhantes.

A conceção desta questão teve como propósito explorar este tipo de erro o qual é igualmente identificável no excerto de entrevista que se segue.

Par 5 questão 2:

H: E a equação 2x+2x = 10+4 é equivalente à equação 2x+4 = 10+2x?

A: Colocámos os x's para um lado e os sem x's para o outro, não sei se isso se pode fazer ou não.

H: E a ti o que te parece?

O: ...[não responde]

Após pedir aos alunos que resolvessem a equação '2x+4 = 10+2x', estes dividiram os termos da equação por '2', depois subtraíram '2' a cada membro da equação e chegaram à equação 'x = 3+x'. Ao compararem esta equação com a equação '2x+2x = 10+4', os alunos concluíram que as equações não eram equivalentes, provavelmente porque os membros de uma equação não se "correspondiam" aos membros da outra. Segue-se o excerto relativo à entrevista ao Par 6.

Par 6 questão 2:

H: E 2x+2x = 10+4 é equivalente a 2x+4 = 10+2x?

O: Não, não podemos meter os x's num membro e os números noutro.

H: Porquê?

O: Não sei, mas acho que não se pode.

H: O que "retirámos" ao primeiro membro da equação 2x+4 = 10+2x para chegar à equação 2x+2x = 10+4?

O: Retirámos 4.

H: Então e no *Solver* como ficaria?

O: Ficava 2x = 6 + 2x. Não são equivalentes.

As primeiras falas do aluno no diálogo, evidenciam que ele "pressente" que não se podem transpor termos de uma equação de um membro para o outro sem atender aos princípios de equivalência, mas não tem a certeza. Só depois de eu lhe colocar duas questões para o apoiar, o aluno consegue concluir corretamente que as equações não são equivalentes.

5.1.6. Conclusão incorreta da resolução da equação

A dificuldade em concluir a resolução das equações foi manifestando-se ao longo da minha intervenção por vários alunos. Na resolução da equação '10x+11 = 11x+10' referente à questão 5 da tarefa Aluno X, o Par 2 após várias tentativas acaba por perder-se um pouco, depois consulta as folhas de *Excel* anteriores, apaga as inserções entretanto realizadas, recomeça a resolução e acaba por não superar a dificuldade final associada à resolução da equação '-x = -1' (ver figura 14).

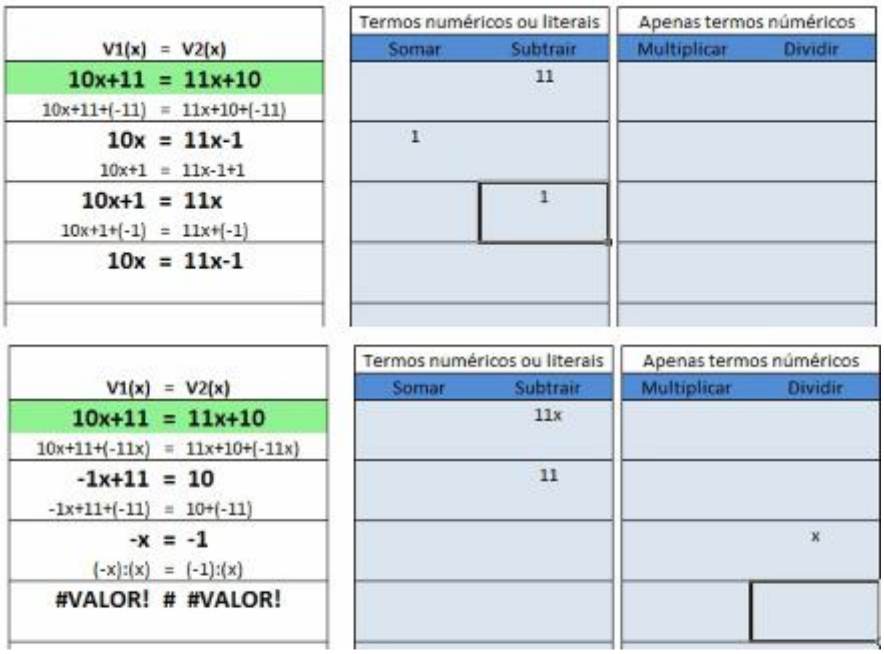


Figura 14 – Aluno X, questão 5, Par 4.

Também na análise às produções dos alunos referentes ao TPC II, pude constatar que o erro que mais comumente foi cometido pelos alunos foi a conclusão incorreta da resolução da equação:

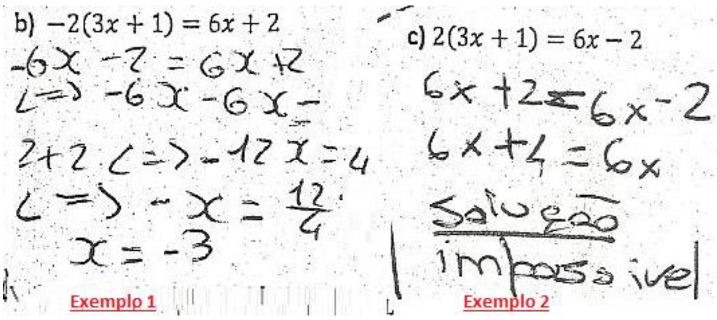


Figura 15 – TPC II, questão 5, conclusão incorreta da resolução da equação.

No exemplo 1, a aluna divide '12' por '4' quando deveria dividir ''4' por '12'. No exemplo 2, temos a produção de um aluno que não termina a resolução da equação, no entanto, a equação equivalente final que obtém é-lhe suficiente para perceber que está perante um caso de impossibilidade.

No diálogo mantido na entrevista com o Par 6 também foi identificada a dificuldade dos alunos em concluir a resolução de equações, na questão 3 da tarefa Equações III que pedia a resolução da equação '3(2x+1)+3 = 6x+6' o aluno desse par, após terem chegado à equação ' 6x+6= 6x+6' afirmou "paramos por aqui porque é igual" e não concluiu a resolução da equação. O aluno tendo em conta o que foi trabalhado nas aulas, deveria ter continuado a determinar equações equivalentes mais simples como por exemplo 'x=x', '6=6' ou '0=0', referindo de seguida que a equação é possível e indeterminada.

5.1.7. Classificação de equações

A dificuldade relacionada com a classificação de equações foi verificada de duas formas, em questões que pediam aos alunos que classificassem equações, ou na resolução de equações que, por não serem possíveis e determinadas, causaram bloqueios aos alunos quando estes as tentavam resolver.

Como descrevi, na Aula 5 os alunos foram confrontados, na questão 2 da tarefa Equações I, com uma equação possível e indeterminada e com uma equação impossível. Todos os pares observados conseguiram ir resolvendo as equações (ver figura 16) mas, confrontados com expressões como '3x = 3x', 'x = x', '0x = 0x' na equação possível e indeterminada, ou quando confrontados com expressões como '4 = 0' ou '0 = -4' na equação impossível, sentiram dificuldade em lidar com essas expressões. Quando confrontados com expressões como as referidas os alunos bloquearam e optaram por apagar as suas produções e reiniciar a resolução das equações. Novamente chegando a expressões similares, os alunos acabaram por desistir da resolução e avançar para a questão 3 da tarefa.

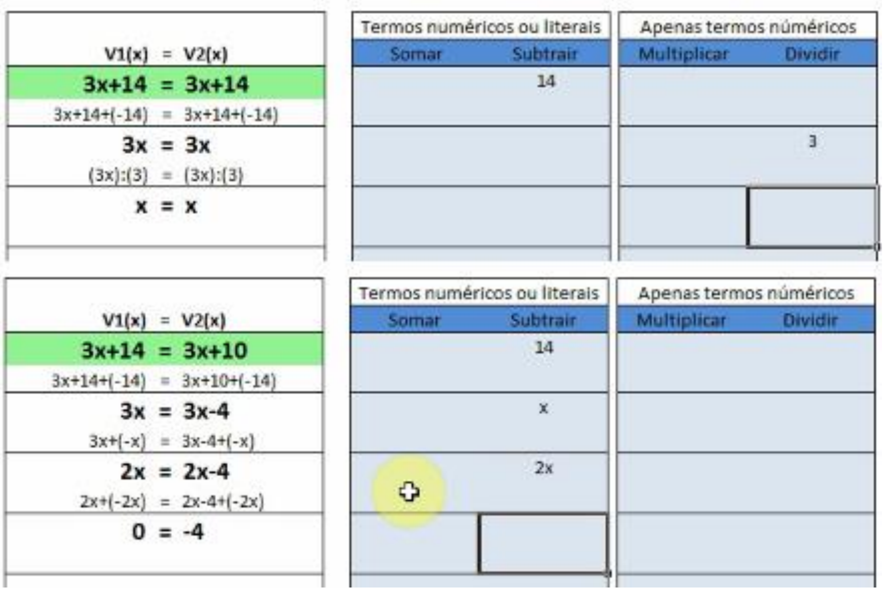


Figura 16 – Equações I, questão 2, Par 4.

A exploração que planeei para esta aula encerrava em si estes riscos, visto que os alunos não tinham, nesta fase, conhecimento da existência deste tipo de equações e, como tal, era expectável que sentissem este tipo de dificuldade.

Em relação ao trabalho desenvolvido em torno da equação ‘3x-4 = 14+3x’ da tarefa Equações II, os alunos apagaram diversas vezes o que tinham feito, isto apesar de terem chegado a passos intermédios corretos como ‘0x + 0 = 0x + 6’ mas que não parece ter-lhes feito muito sentido. Na resolução desta equação, os alunos consultaram bastantes vezes as resoluções das outras equações, depois regressavam à equação ‘3x-4 = 14+3x’, apagavam tudo o que tinham feito e recomeçavam. O Par 4 por exemplo, após algumas tentativas, chegou a ‘0x + 0 = 0x + 18’ e, após alguns minutos de navegação entre as folhas de cálculo do *Solver*, parece abandonar esta resolução e iniciar os trabalhos relativos à terceira questão da tarefa.

Relativamente à classificação das equações propriamente dita, dos treze alunos que realizaram o TPC II, nenhum classificou corretamente todas as três equações da questão 5. Nesta fase não era óbvio para os alunos o que eram equações possíveis e determinadas, equações possíveis e indeterminadas ou equações impossíveis. Ainda assim, existe evidência de que alguns alunos conseguiram ficar com algumas noções relativas à classificação de equações, como mostro nos exemplos seguintes (ver figura 17).

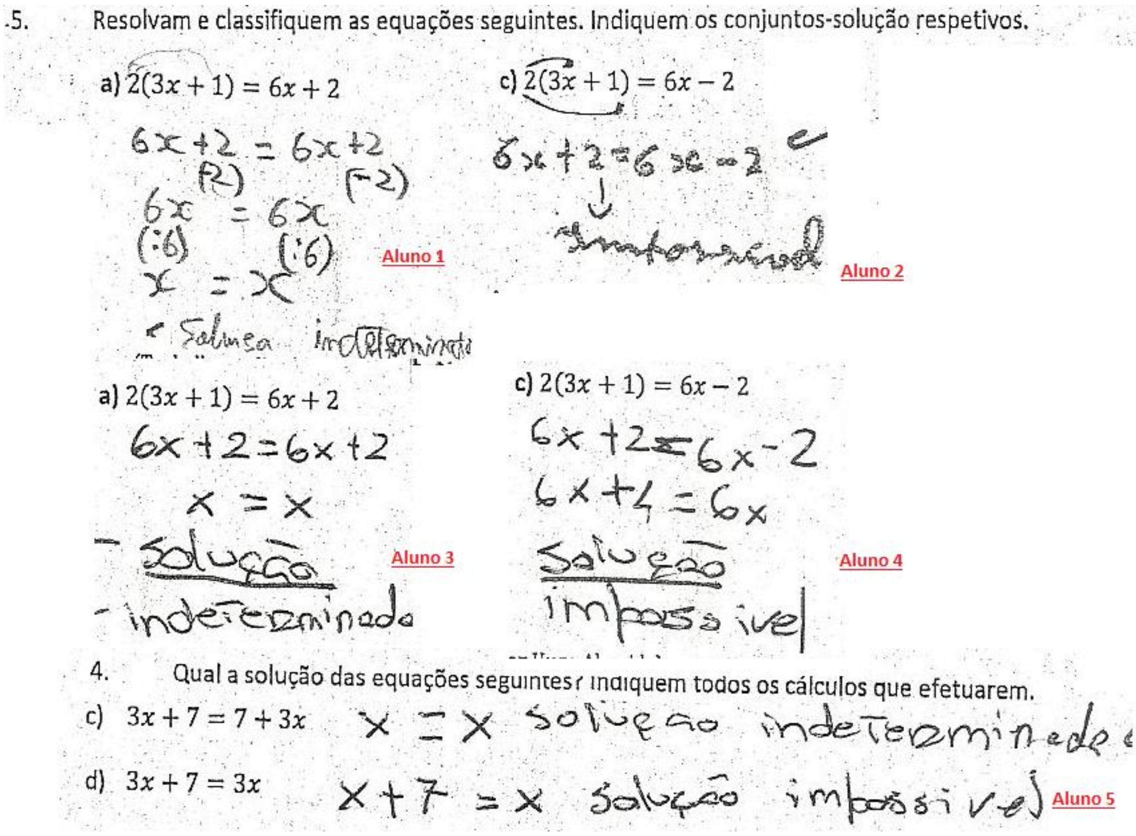


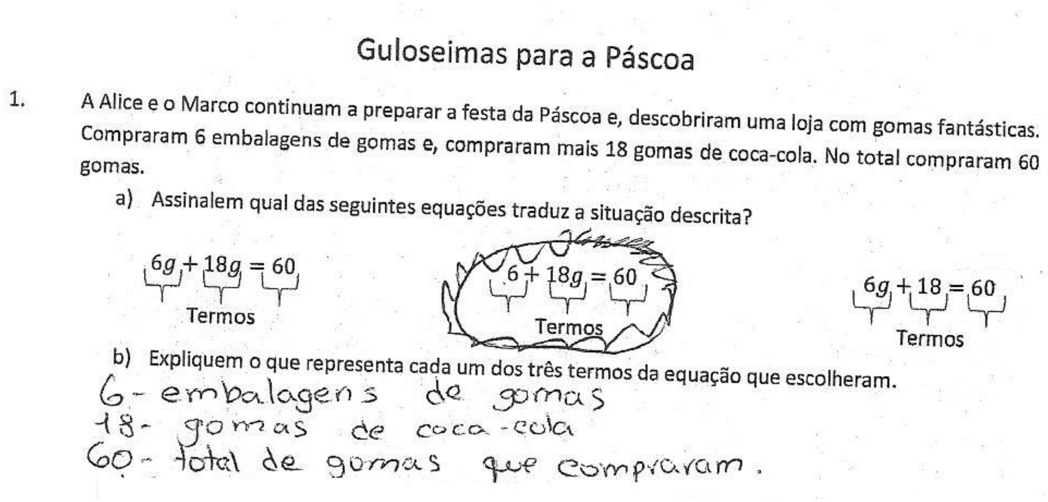
Figura 17 – TPC II, questão 5, vários alunos.

Observa-se que para classificarem as equações os alunos resolveram-nas, sendo verificável a correta utilização dos parêntesis ou a aplicação, nem sempre correta, de regras baseadas nos princípios de equivalência. Os alunos classificaram corretamente as equações como [possíveis e] indeterminadas quando chegaram à equação ‘x = x’ e ao obterem, nas suas resoluções, equações que tinham nos seus membros monómios com incógnita iguais mas termos independentes diferentes (por exemplo ‘6x+2 = 6x-2’), concluíram corretamente que a equação era impossível.

Nas várias respostas, os alunos escreveram sempre solução indeterminada ou impossível, tal deve-se a um erro cometido por mim na aula anterior onde, no momento de síntese, classifiquei as soluções das equações quando deveria ter classificado as equações.

5.1.8. Compreensão do significado da incógnita e tradução algébrica de problemas.

Após a primeira aula em que os alunos trabalharam com o *Solver*, seguiu-se uma aula de 45 minutos, a Aula 4. Os objetivos estabelecidos para esta aula visaram trabalhar a compreensão dos alunos, nomeadamente no que ao significado da incógnita diz respeito. Analisando as produções dos alunos em torno da tarefa Guloseimas para a Páscoa, confirmo a dificuldade que os alunos sentiram em transitar de um uso de letras como designando abreviaturas para um uso de letras designando incógnitas. Apenas dois pares de alunos identificaram corretamente o significado da incógnita ‘g’, ou seja, que ‘g’ representava o número de gomas existentes em cada embalagem. Todos os restantes pares de alunos identificaram ‘g’ como sendo uma abreviatura de “gomas”. Na figura seguinte (ver figura 18), consta a produção de um par de alunos constituído por um aluno e por uma das melhores alunas da turma que pertence ao quadro de honra e tem classificação 5 a Matemática.


Guloseimas para a Páscoa

1. A Alice e o Marco continuam a preparar a festa da Páscoa e, descobriram uma loja com gomas fantásticas. Compraram 6 embalagens de gomas e, compraram mais 18 gomas de coca-cola. No total compraram 60 gomas.

a) Assinalem qual das seguintes equações traduz a situação descrita?

$\underbrace{6g}+\underbrace{18g}=\underbrace{60}$ Termos

$\underbrace{6}+\underbrace{18g}=\underbrace{60}$ Termos

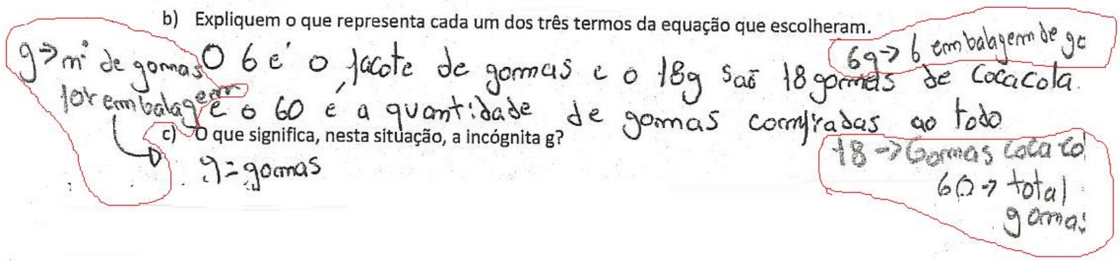
$\underbrace{6g}+\underbrace{18}=\underbrace{60}$ Termos

b) Expliquem o que representa cada um dos três termos da equação que escolheram.

6- embalagens de gomas
18- gomas de coca-cola
60- total de gomas que compraram.

Figura 18 – G. Páscoa, questão 1, compreensão do significado de incógnita I.

Na resposta à primeira questão da tarefa, podemos constatar que os alunos selecionaram erradamente a segunda equação, tendo depois riscado essa opção devido, provavelmente, à discussão e síntese que procedeu o seu trabalho autónomo. Este exemplo, onde o par a partir da frase “compraram mais 18 gomas de coca-cola” seleciona incorretamente a equação onde consta o monómio ‘18g’ é bastante representativo do que fizeram os outros pares de alunos. Nesta fase, os alunos entenderam ‘g’ como uma abreviatura de “gomas” e, por esse motivo, na alínea b), expressam erradamente o significado dos dois primeiros monómios da equação. A tradução algébrica do problema ficou assim comprometida e tenho a convicção que tal é, de facto, uma consequência da não compreensão do significado da incógnita. O exemplo que se segue é também ele ilustrativo desta dificuldade sentida pela generalidade da turma e refere-se à produção de um aluno que trabalhou sozinho por o seu par ter faltado à aula - este aluno tem classificação 2. A seleção assinalada na figura 19 foi feita por mim e identifica o que o aluno transcreveu do quadro nos momentos de discussão e síntese.


b) Expliquem o que representa cada um dos três termos da equação que escolheram.

g -> nº de gomas 10 embalagem

O 6 é o pacote de gomas e o 18g são 18 gomas de cocacola e o 60 é a quantidade de gomas compradas ao todo

6g -> 6 embalagem de gc

18 -> Gomas coca col

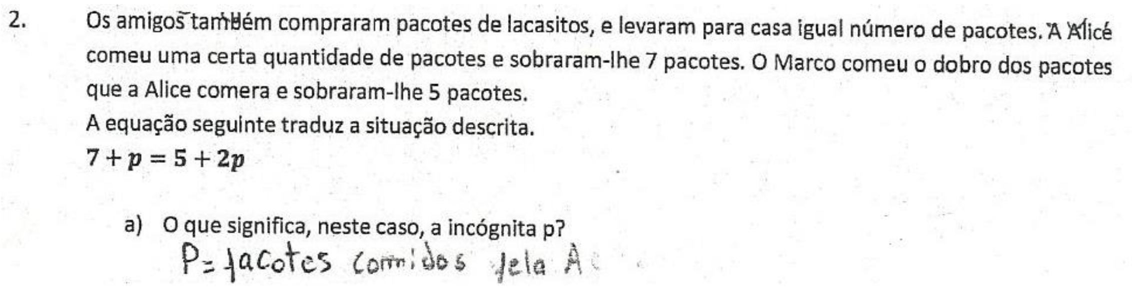
60 -> total gomas

c) O que significa, nesta situação, a incógnita g?

g = gomas

Figura 19 – G. Páscoa, questão 1, compreensão do significado de incógnita II.

Na resposta à questão 2 da tarefa, já se verificou que vários alunos identificaram corretamente a incógnita ‘p’ como representando o número de pacotes de lacasitos comidos pela Alice, ou apenas os pacotes comidos pela Alice. No entanto estou convicto que tal se deve, também, ao facto de ‘p’ sugerir uma abreviatura de pacotes. (ver figura 20).


2. Os amigos também compraram pacotes de lacasitos, e levaram para casa igual número de pacotes. A Alice comeu uma certa quantidade de pacotes e sobraram-lhe 7 pacotes. O Marco comeu o dobro dos pacotes que a Alice comera e sobraram-lhe 5 pacotes.

A equação seguinte traduz a situação descrita.

$7 + p = 5 + 2p$

a) O que significa, neste caso, a incógnita p?

P = pacotes comidos pela A

Figura 20 – G. Páscoa, questão 2, compreensão do significado de incógnita III.

Da análise às produções dos alunos em torno da tarefa Mestres e guloseimas, destaco que cerca de metade da turma continuou a revelar dificuldades relativamente à identificação do significado da incógnita no contexto do problema. A primeira alínea da primeira questão continha a afirmação falsa de que “ x representa o número de bolos em cada prato da balança”, no entanto metade dos alunos considerou-a verdadeira. Este erro motivou uma ampla discussão na turma e alguns alunos explicaram a outros que a incógnita era uma quantidade que queríamos descobrir, como tal ‘x’ teria corresponder ao peso de cada bolo e não ao número de bolos.

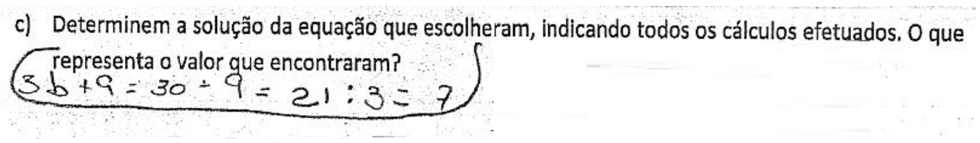
Relativamente à alínea b) da mesma questão, os alunos revelaram mais acerto, porém tal facto não significa, na minha opinião, uma evidência de aprendizagem na tradução algébrica de problemas. Creio que os alunos observaram a balança (ver figura 21) e verificaram que esta tinha um ‘x’ no segundo prato e isso não se verificava no segundo membro da equação (ver figura 21).

Figura 21 - Questão 1, Mestres e guloseimas.

Na resolução da questão 2 da tarefa Equações II, os alunos continuaram a evidenciar dificuldades na atribuição de significado à incógnita no contexto da tarefa e na respetiva tradução algébrica do problema. A análise das produções dos alunos revela apenas uma formulação distinta daquela que foi redigida no quadro, ou seja, os alunos por não terem conseguido formular um enunciado que pudesse ser traduzido pela equação ‘9x-12 = 12+3x’, optaram por transcrever do quadro que “A quantidade de bolos feitos em 9 dias menos 12 bolos é igual a 12 bolos mais a quantidade de bolos feitos em 3 dias”. Esta dificuldade, de compreensão do significado da incógnita no contexto das tarefas, é mencionada nas folhas de “Registo de aprendizagens e dificuldades” produzidas por mim, pelo colega de mestrado e pelo professor cooperante, como uma dificuldade manifestada pelos alunos, especialmente nas aulas iniciais.

5.1.9. Outras dificuldades

Na análise dos dados recolhidos, não encontrei evidências suficientes para destacar a dificuldade em dar ao sinal de igual um significado relacional como uma dificuldade sentida pela generalidade dos alunos. Tal pode dever-se ao facto de no programa *Solver* as equações equivalentes serem dispostas verticalmente e, desta forma, os alunos foram interiorizando essa disposição das equações que limita a ocorrência de erros ao nível da utilização do sinal de igual. Ainda assim, destaco de seguida o único exemplo que encontrei referente à incorreta utilização do sinal de igual.


c) Determinem a solução da equação que escolheram, indicando todos os cálculos efetuados. O que representa o valor que encontraram?

3b + 9 = 30 - 9 = 21 : 3 = 7

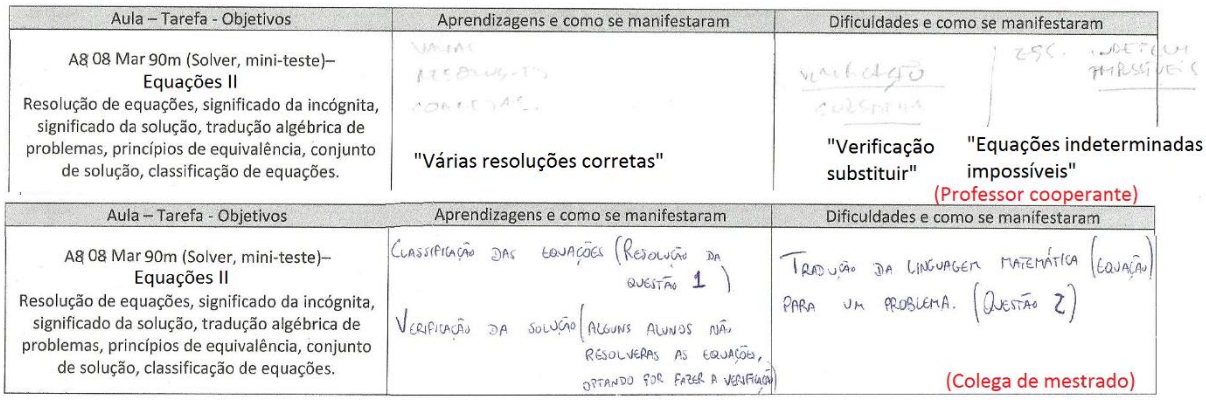
Figura 22 - Mestres e guloseimas, questão 2.

Na produção anterior, um par de alunos apresentou uma representação horizontal na resolução de uma equação da questão 2 da tarefa Mestres e guloseimas onde, apesar de chegarem ao valor correto da solução da equação, utilizam o sinal de igual para "ligar" resultados de cálculos sucessivos, sem considerar a sua equivalência.

Pelo que expus, considero que em relação à utilização do sinal de igual, o *Solver* constituiu um apoio importante aos alunos nesta fase inicial da aprendizagem das equações do 1.º grau.

Relativamente à verificação da solução das equações, dos seis pares observados três optaram por resolver parte das equações da questão 3 da tarefa Equações II para aferir quais tinham solução '2'. O Par 1 faltou à aula, o Par 6 não efetuou qualquer registo no enunciado da tarefa ou no *Solver* e o Par 2 efetuou a verificação convencional em uma das cinco equações da questão. Assim, estou em crer que estes alunos não se apropriaram, convenientemente, do procedimento relativo à verificação da solução das equações. Relativamente aos restantes alunos da turma, a análise aos materiais produzidos na resolução da tarefa também não constituem evidência de que a verificação da solução das equações foi ou não conseguida, isto porque a maioria dos alunos não efetuaram registos relativos a esta questão. Em termos da minha interação com os alunos pude detetar que apenas alguns se apropriaram do procedimento relativo à verificação das soluções das equações, este procedimento ficou a necessitar de ser mais trabalhado com os alunos.

Os resultados da análise das folhas de "Registo de aprendizagens e dificuldades" também não são conclusivos, o professor cooperante identificou a verificação como uma dificuldade e o colega de mestrado como uma aprendizagem, o mesmo tendo acontecido em relação ao objetivo de classificação das equações (ver figura 23).



Aula – Tarefa - Objetivos	Aprendizagens e como se manifestaram	Dificuldades e como se manifestaram
A8 08 Mar 90m (Solver, mini-teste)– Equações II Resolução de equações, significado da incógnita, significado da solução, tradução algébrica de problemas, princípios de equivalência, conjunto de solução, classificação de equações.	"Várias resoluções corretas"	"Verificação substituir" "Equações indeterminadas impossíveis"

(Professor cooperante)

Aula – Tarefa - Objetivos	Aprendizagens e como se manifestaram	Dificuldades e como se manifestaram
A8 08 Mar 90m (Solver, mini-teste)– Equações II Resolução de equações, significado da incógnita, significado da solução, tradução algébrica de problemas, princípios de equivalência, conjunto de solução, classificação de equações.	Classificação das equações (Resolução da questão 1) Verificação da solução (alguns alunos não resolveram as equações, optando por fazer a verificação)	Tradução da linguagem matemática (equação) para um problema. (Questão 2)

(Colega de mestrado)

Figura 23 – Folhas de "Registo de aprendizagens e dificuldades".

Na minha intervenção, para evitar complexidade excessiva, optei por trabalhar com os alunos equações que na sua maioria tinham solução pertencente ao conjunto dos números naturais. Em consequência, nas entrevistas realizadas aos alunos, foi evidente a dificuldade dos alunos em raciocinar no conjunto dos números racionais para determinar se a equação ‘9x = 3’ era ou não impossível. Seguem-se excertos que mostram esta dificuldade.

Par 6 questão 1:

H: …E a primeira equação?

O: Se dividir por 3, vai dar 3x = 1, é impossível, porque não há nenhum número que dê.

A: Não há nenhum número em comum que divida estes dois.

H: Se estivessem no *Solver*?

A: Voltava atrás, tentava encontrar outra forma.

H: E se tivessem 3x = 3?

M: Dividíamos por 3.

H: E não podemos fazer isso sempre?

M: Sim…

H: Experimentem.

O: Vai dar zero vírgula qualquer coisa…

A: Ahhh ok.

Par 5 questão 1:

H: E a primeira equação [9x = 3] é impossível?

A: Acho que sim porque não há nenhum número que multiplicado por 9 dê 3.

Os seis pares observados também evidenciaram dificuldades relativamente à resolução de equações que tivessem a incógnita no segundo membro da equação. Observando as filmagens é visível o desconforto do Par 2 relativamente ao facto de após terem somado ‘5x’ à equação ‘-5x+10 = 20’ a incógnita ter ficado no segundo membro da equação. Os alunos foram navegando pelas folhas de cálculo anteriores para perceber como é que o Aluno X tinha resolvido as equações das questões 1 e 4, tendo depois optado por apagar as inserções que tinham feito e começar por subtrair ‘10’ a cada membro da equação. A dificuldade em lidar com equações que têm incógnita no segundo membro também esteve presente na resolução das tarefas Equações I e Equações II embora de forma menos expressiva, o que evidencia a realização de aprendizagens a este nível.

Na resolução de equações com recurso ao *Solver*, a equação onde todos os pares revelaram mais dificuldade, foi a equação '3x-4 = 14-3x' da tarefa Equações II. Na resolução desta equação os alunos realizaram inúmeras tentativas para encontrarem a solução da equação. Uma delas, comum a dois pares de alunos, foi dividir a expressão por '3x', outras foram subtrair '14', adicionar '4', entre outras. Esta equação desafiou bastante os alunos e, na minha opinião, tal deveu-se ao facto de para além de existirem monómios em 'x' em ambos os membros da equação, estes tinham coeficientes contrários. Justifico esta assunção porque nas outras duas equações da tarefa '9x-12 = -12+9x' e '3x-4 = 14+3x', os alunos revelaram menor dificuldade em subtrair aos membros das equações '9x' e '3x' respetivamente. Portanto, creio que o facto de existir um monómio, com incógnita e com o mesmo coeficiente mas de sinal contrário, em cada membro da equação terá deixado os alunos confusos acerca da opção que deveriam de tomar. No entanto, depois de algumas tentativas, todos os pares acabaram por conseguir concluir corretamente a resolução da equação.

5.2. Análise das aprendizagens

Em todas as aulas os alunos manifestaram aprendizagens tendo sido notório que após as primeiras aulas os alunos conseguiram mobilizar procedimentos, ideias e linguagem formal trabalhados em aulas anteriores.

5.2.1. Adição de termos não semelhantes

As aprendizagens realizadas a este nível são evidentes nas filmagens relativas ao trabalho desenvolvido pelos alunos em torno da tarefa Equações I. Detetei que foram poucas as vezes que os alunos, ao contrário do que aconteceu na primeira aula na sala de computadores, tentaram subtrair o coeficiente de um termo em 'x' para obter 'x'. As filmagens, das produções que os alunos realizaram na última aula da minha intervenção letiva, revelam que apenas o Par 6 tentou subtrair o coeficiente de um monómio em 'x' para isolar a incógnita.

A interação com os alunos entrevistados permitiu confirmar que, apesar de algumas hesitações e incorreções na linguagem, houve aprendizagem relativa à adição algébrica de termos, como mostro a seguir com alguns extratos.

Par 6, questão 1:

A: [Após o colega do par afirmar que a equação era impossível] Também acho, porque 9x não é igual a 9x + 3

H: Porquê?

O: Porque se tirarmos 3 de um termo [o aluno refere-se a membro] também temos de tirar do outro, fica 9x–3 = 9x+0.

A: Não percebi… [pensa uns segundos] Concordo!

H: Porquê?

A: Porque se tirarmos 3 a cada termo [a aluna refere-se a membro] no primeiro [membro] fica 6x que não é igual a 9x.

O: Tirar 3 não é tirar 3x.

A: Não percebi.

O: Se quiseres tirar 3 ao [coeficiente de] 9x tens de tirar 3x, se quiseres tirar a estes que estão cá fora [o aluno refere-se aos termos independentes] tiras 3.

A: Ok.

Par 5, questão 2:

H: A equação 6x = 12x é equivalente a 2x+4 = 10+2x?

A: Eu acho que não porque não podemos somar coisas diferentes.

O: Não podemos somar golfinhos com ursos.

Par 6, questão 2:

H: Alguma das equações é equivalente à equação 2x+2x = 10+4?

A: A da alínea a) é, porque 2x+4 é 6x. No segundo membro dá 10+2x que é 12x.

H: Estás de acordo?

O: Não, não podemos juntar x’s com sem x’s. Não se pode juntar golfinhos com ursos, não se podem fazer gursos.

H: E então?

A: Não é equivalente.

A análise destes excertos permite verificar que os alunos conseguiram identificar termos não semelhantes e justificar que estes não podem ser adicionados, recorrendo mesmo ao que havia sido concluído na primeira aula da minha intervenção: “não se podem somar golfinhos com ursos”.

5.2.2. Interpretação de monómios do 1.º grau

Registo também evolução em relação à dificuldade de interpretação de monómios do 1.º grau, isto porque, á exceção do Par 5, todos os outros pares cujas filmagens observei não revelaram problemas em subtrair ‘x’ aos membros das equações da tarefa Equações II. Os alunos do Par 4 por exemplo optaram por começar a resolver a equação ‘4x+13 = 19+x’ subtraindo ‘x’ a cada membro da equação como se pode verificar na figura seguinte.

	Termos numéricos ou literais		Apenas termos numéricos	
V1(x) = V2(x)	Somar	Subtrair	Multiplicar	Dividir
4x+13 = 19+x 4x+13+(-x) = 19+x+(-x)		x		
3x+13 = 19 3x+13+(-13) = 19+(-13)		13		
3x = 6 (3x):(3) = (6):(3)				3
x = 2				

Figura 24 – Equações II, questão 5, Par 4.

Nesta última aula da minha intervenção, penso que muitos alunos tinham adquirido noções algébricas suficientemente robustas para interpretar os monómios com incógnita corretamente, o que se revelou fulcral para a resolução das equações, nomeadamente quando era necessário subtrair ou somar ‘x’, ou ‘3x’ ou ‘9x’ aos membros das equações.

5.2.3. Uso incorreto de parêntesis

Relativamente ao trabalho realizado em torno da utilização de parêntesis nas equações, o mesmo parece ter produzido bons efeitos, na medida em que 12 dos 13 alunos que realizaram o TPC II revelaram algum grau de correção na sua manipulação na questão 5, com procedimentos semelhantes ao que mosto na figura seguinte:

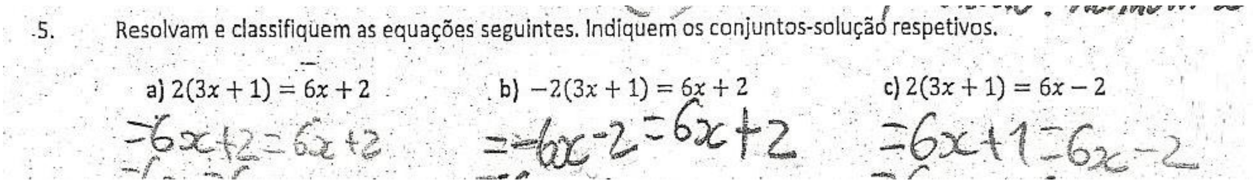


Figura 25 – TPC II, questão 5.

Nas entrevistas realizadas aos alunos, os três pares usaram corretamente os parêntesis, tendo aplicado, e mencionado corretamente, a propriedade distributiva da multiplicação (ver figura 26).

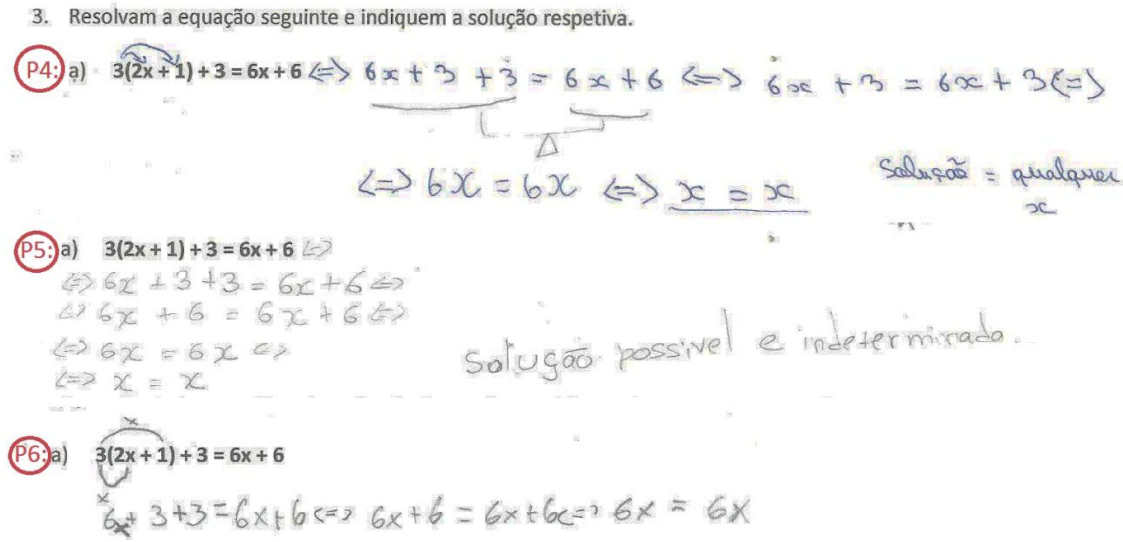


Figura 26 – Equações III, questão 3, resoluções dos 3 pares entrevistados.

5.2.4. Adição incorreta de termos semelhantes

Os erros na adição de termos semelhantes não ocorreram de forma frequente, sendo evidente na entrevista ao Par 5 a correção do procedimento dos alunos. A aluna deste par mencionou que “aqui [6x+3+3 = 6x+6] podemos juntar o 3 com o 3”.

Creio que esta relativa facilidade em adicionarem termos semelhantes que os alunos adquiriam, deve-se ao facto de terem conseguido, no início do ano letivo, mobilizar conhecimentos adquiridos no 2.º ciclo relativamente à adição e subtração de números naturais. Estas aprendizagens foram reforçadas, também no inicio do ano letivo, com a realização de trabalho em torno da adição de números inteiros, nessa fase os alunos revelaram bastante dificuldade em adicionar ‘-a’ a ‘b’ sempre que ‘a>b’.

Outro motivo que justifica, na minha opinião, que se tivessem verificado poucos erros na adição de termos semelhantes de equações, foi o facto de não se terem utilizado, nesta fase, monómios com coeficientes fracionários.

5.2.5. Conclusão incorreta da resolução da equação

Decorre da análise às produções que os alunos realizaram na tarefa Equações II que, a maioria dos pares conseguiram concluir corretamente a resolução das equações, inclusivamente a segunda equação da tarefa, que era possível e indeterminada, os alunos ao chegarem a ‘x = x’ ou ‘0x + 0 = 0x + 0’ terminaram, sem grandes hesitações, o que estavam a fazer na folha de cálculo do *Solver* respetiva dando a resposta pedida e iniciaram a resolução de outra equação.

5.2.6. Classificação de equações

Foram igualmente detetadas aprendizagens ao nível da classificação das equações impossíveis. Na resolução da tarefa Equações II o Par 3 chegou à expressão ‘0x + 0 = 0x + 18’ mas, ao contrário dos outros pares, não parece hesitar em relação à expressão encontrada, isto porque em vez de ir consultar as outras folhas de cálculo do *Solver*, escreve na folha de cálculo em que trabalhava que a equação é impossível (ver figura 27).

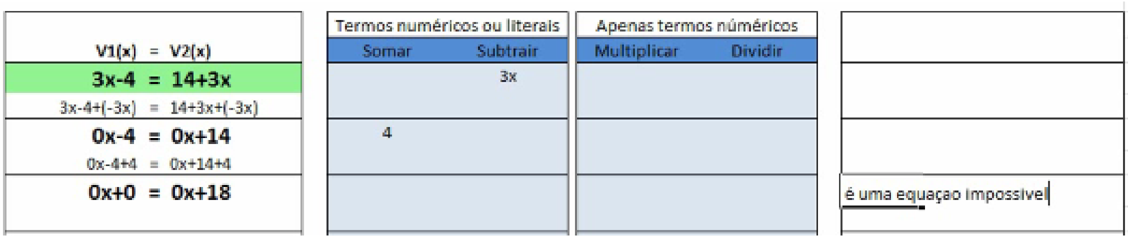


Figura 27 – Equações II, questão 1, Par 3.

Também nas entrevistas, houve evidências de que os alunos realizaram aprendizagens ao nível da classificação das equações, como procuro evidenciar nos extratos seguintes.

Par 5, questão 1:

H: Qual das equações é impossível?

A: A alínea b) não é impossível porque 9x é igual a 9x e não pode ser impossível.

H: Porquê?

A: Porque 9x é igual a 9x.

A: A da alínea c) é impossível, porque tem 9x de cada lado [membro], só que de um lado ao 9x acrescenta-se mais 3 [9x+3].

Par 6, questão 1:

H: Qual das equações é impossível?

O: Acho que é a b) porque se o x for 4 dá 36 = 36.

A: Acho que não é impossível…

O: É a c!

A: Também acho, porque 9x não é igual a 9x + 3

H: Porquê?

O: Porque se tirarmos 3 de um termo também temos de tirar do outro, fica 9x–3 = 9x+0.

A análise destes diálogos sugere que os alunos conseguiram identificar informalmente que a equação ‘9x = 9x + 3’ é impossível, havendo a ideia de que não existe “equilíbrio” entre os membros da equação.

Relativamente ao Par 4, verifiquei que este foi o único que optou por resolver as equações para verificar qual era a impossível, apresentando as seguintes resoluções (produzidas essencialmente pelo aluno do par).

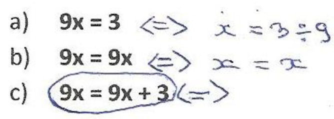


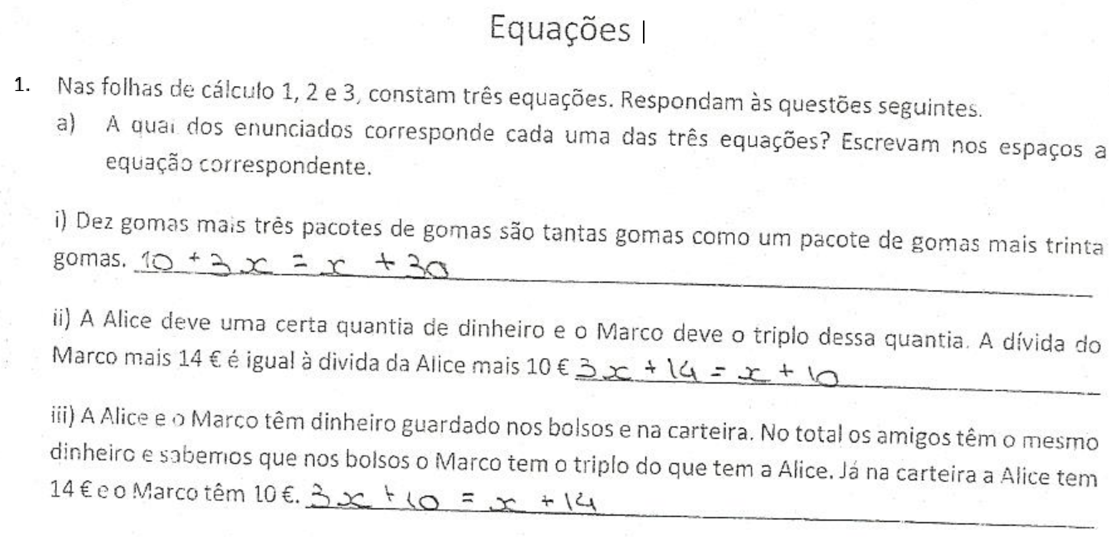
Figura 28 – Equações III, questão 1, Par 4.

Repare-se que para responder, o aluno resolve as duas primeiras equações corretamente e utiliza o símbolo de equivalência na apresentação dos cálculos. O aluno também seleciona corretamente a 3.ª equação como sendo a impossível e, aparentemente, terá tentado também resolvê-la, como indica a presença do sinal de equivalência. Tal como ocorreu na resolução da questão 5 alínea c) do TPC II (ver figura 17), também aqui estou em crer que o aluno considerou a equação ‘9x = 9x+3’ como impossível, por ter nos seus membros monómios com incógnita iguais mas termos independentes diferentes.

5.2.7. Compreensão do significado de incógnita e tradução algébrica de problemas

No regresso à sala de computadores para uma segunda aula em que que se utilizou o programa computacional *Solver*, os alunos resolveram a tarefa Equações I. Na primeira questão desta tarefa os alunos associaram três equações a três enunciados, desafiando-se desta forma a sua capacidade de tradução algébrica de problemas.

A grande maioria dos pares de alunos associou corretamente as equações aos enunciados e identificaram corretamente o significado da incógnita em cada caso. Fiquei com a convicção que vários alunos conseguiram estabelecer conexões com a discussão e síntese que foram realizadas na aula anterior em torno do significado da incógnita. Nesta aula senti, e verifiquei nas produções escritas, que os alunos lembraram-se que a incógnita é um quantidade ou valor que queremos descobrir e não uma abreviatura de uma palavra. O facto de as equações apresentadas no enunciado terem todas a letra ‘x’ para representar a incógnita, poderá ter ajudado os alunos a "descolarem" da ideia de que a letra é uma abreviatura. (ver figuras 29 e 30).



Equações I

1. Nas folhas de cálculo 1, 2 e 3, constam três equações. Respondam às questões seguintes.

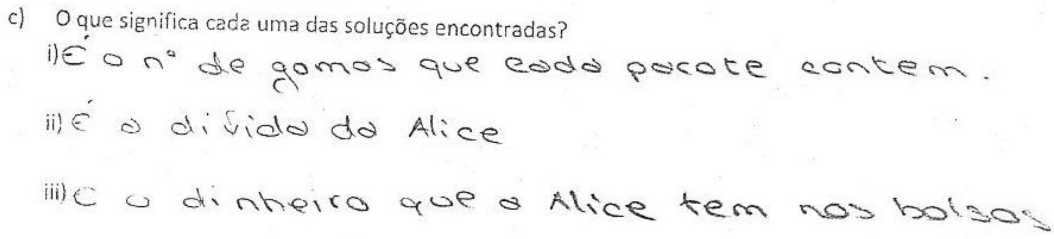
a) A qual dos enunciados corresponde cada uma das três equações? Escrevam nos espaços a equação correspondente.

i) Dez gomas mais três pacotes de gomas são tantas gomas como um pacote de gomas mais trinta gomas. $10 + 3x = x + 30$

ii) A Alice deve uma certa quantia de dinheiro e o Marco deve o triplo dessa quantia. A dívida do Marco mais 14 € é igual à divida da Alice mais 10 € $3x + 14 = x + 10$

iii) A Alice e o Marco têm dinheiro guardado nos bolsos e na carteira. No total os amigos têm o mesmo dinheiro e sabemos que nos bolsos o Marco tem o triplo do que tem a Alice. Já na carteira a Alice tem 14 € e o Marco têm 10 €. $3x + 10 = x + 14$

Figura 29 – Equações I, questão 1, tradução algébrica de problemas.



c) O que significa cada uma das soluções encontradas?

i) É o nº de gomas que cada pacote contem.

ii) É a divida da Alice

iii) É o dinheiro que a Alice tem nos bolsos

Figura 30 – Equações I, questão 1, significado da incógnita.

Apesar de na questão apresentada na figura anterior ser pedido o significado de cada uma das soluções encontradas, a maioria dos alunos respondeu à questão "o que significa a incógnita no contexto do problema?". Quererá isto dizer que os alunos tiveram dificuldade em distinguir o significado da incógnita do significado da solução? No entanto, revelaram ter conseguido uma boa mobilização do significado de incógnita que foi trabalhado na aula anterior.

Na resolução da questão 2 da tarefa Mestres e guloseimas, encontramos outros exemplos demonstrativos da capacidade revelada pelos alunos para, entre equações dadas, selecionar as que traduziam o enunciado do problema, como no caso que a seguir apresento.

2. O Marco tem três caixas de bombons, a Alice tem 9 bombons e, no total, os dois amigos têm 30 bombons.

a) Qual das seguintes equações traduz a situação descrita? Expliquem a vossa escolha.

$3 + 9b = 30$ $\quad$ $3b + 9 = 30$ $\quad$ $3b + 9b = 30$

b → nº de bombons por caixa

b) Tendo em conta a situação descrita, o que significa a incógnita b?

os bombons.

Figura 31 – Mestres e guloseimas, questão 2, Par 3.

Observando o que foi escrito na alínea a) verifica-se que os alunos conseguiram identificar corretamente a incógnita 'b' como sendo uma quantidade por descobrir e não uma abreviatura de bombons, no entanto, apesar de selecionarem corretamente a equação não justificaram a sua escolha.

Na resposta à alínea b) os alunos não apresentam uma descrição completa do significado da incógnita, eventualmente porque já o tinham feito na alínea anterior.

Nas entrevistas realizadas aos alunos, relativamente à questão 4 da tarefa Equações III (figura 32), a tradução algébrica de um problema gerou diálogos cujos excertos transcrevo de seguida, juntamente com a sua análise.

4. Durante todos os dias do mês de Fevereiro, a Alice colocou no seu mealheiro um certa quantia de dinheiro e o Marco colocou no dele o dobro dessa quantia. Em Março abriram os mealheiros e verificaram que o Marco tinha mais 10 € do que a Alice.

a) Escrevam uma equação que traduza o enunciado anterior.

b) O que representa a incógnita?

Figura 32 – Equações III, questão 4.

Par 5, questão 4:

H: Escrevam uma equação que traduza o problema.

A: A Alice colocou uma certa quantia, então [no fim de fevereiro] tinha x. O Marco colocou o dobro dessa quantia que é 2x. O Marco tinha mais 10 [do que a Alice]. Para ser igual [à quantia da Alice], temos de tirar 10 do Marco.

H: Então como ficaria a equação?

A: x = 2x-10.

H: Concordas? Porquê?

O: Sim, porque a Alice tinha [no fim de fevereiro] uma quantia e o Marco tinha mais 10, para ficarem iguais temos de subtrair 10 na quantia [do Marco]

Uma vez que a colega deste aluno já tinha traduzido corretamente o problema para linguagem algébrica e tendo este percebido que o Marco tinha o dobro da quantia da Alice, ou seja, o Marco tinha ‘2x’ e a Alice tinha ‘x’, este quis apenas destacar que à quantia do Marco deveria ser subtraído ‘10’.

H: O que significa a incógnita? [alínea b)].

A: x é o valor que a Alice colocou no mealheiro.

Par 6, questão 4:

Neste par, os alunos optaram por começar por responder à alínea b) que perguntava qual o significado da incógnita. Creio que esta opção dos alunos foi bastante pertinente uma vez que, após refletir sobre o enunciado desta tarefa, considerei que dum ponto de vista indutivo, faria mais sentido começar por perguntar aos alunos qual era a incógnita do problema e só depois pedir que o traduzissem para linguagem algébrica.

O: x significa o dinheiro da Alice.

H: Leiam novamente a questão. O que é o x?

A: A quantia da Alice.

H: O que é que nós não sabemos?

O: A quantia de dinheiro que a Alice juntou, o Marco tem 2x.

A: Mas x também pode ser a quantia que o Marco juntou e dividimos por 2.

H: Leiam bem.

A: x é dinheiro colocado pela Alice no mês de fevereiro.

H: Como escrevemos então a equação?

A: 10+x = 2x.

H: Concordas?

O: Não, eu acho que devemos fazer, se o Marco tinha o dobro… x = 2x.

A: Mas aqui diz que ele tinha mais 10.

H: É melhor voltarem a ler…

M: O dobro de x é 2x.

A: E o 10?

O: O 10 não tem nada a ver.

A: Ai não? O 10 é da quantia dele.

Após nova leitura do enunciado.

H: Quanto tem o Marco? Quanto tem a Alice?

O: O 10 é a diferença entre o Marco e a Alice.

H: Escreve lá essa diferença.

Após algumas questões que coloquei como por exemplo: “quanto era a quantia do Marco?”, “quanto era a quantia da Alice?” e “qual era a diferença?”, o aluno do par escreve ‘2x-x = 10’ e o diálogo prossegue.

H: São [equações] equivalentes?

A: Sim, fizemos a operação inversa.

H: Como passamos de uma equação para outra?

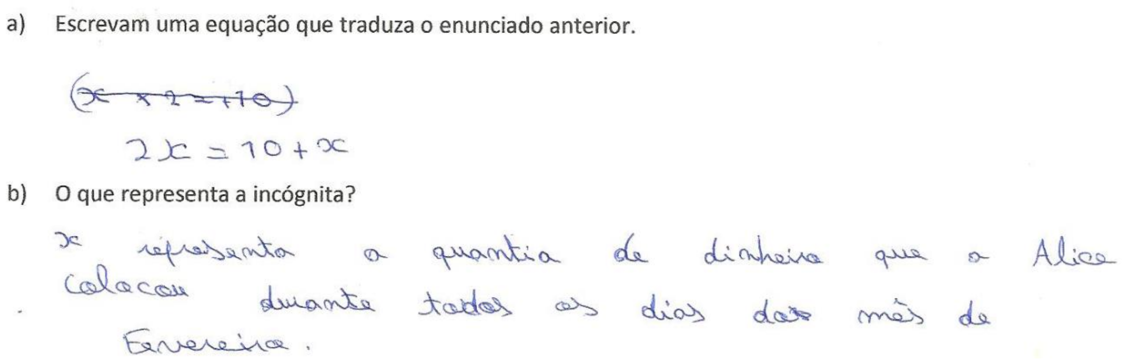
O: Somamos x ao 10, fica 10x… Não, porque não somamos golfinhos com ursos.

Após algumas questões sobre o que acontecia se somássemos x a cada membro, o aluno do par escreve uma equação que traduzia corretamente o problema:

O: 2x = 10 + x.

A interação com os alunos mostrou que estes conseguiram traduzir para monómios as informações do enunciado. A forma de relacionar esses monómios revelou-se mais difícil para o aluno do Par 6 que demorou mais tempo para conseguir chegar à tradução pedida. Assim, creio que os alunos realizaram aprendizagens significativas ao nível da compreensão da incógnita, ainda que o seu significado seja descrito de forma algo informal.

O Par 4, cuja gravação da entrevista não foi conseguida, na mesma questão, também conseguiu identificar a incógnita e traduzir corretamente o problema por meio de uma equação. Porém, tal como se mostra na figura seguinte (figura 33) os alunos começaram por escrever ‘x x 2 = 10’ e depois riscaram essa equação.


a) Escrevam uma equação que traduza o enunciado anterior.

(~~x x 2 = +10~~)

2x = 10 + x

b) O que representa a incógnita?

x representa a quantia de dinheiro que a Alice colocou durante todos os dias dos mês de Fevereiro.

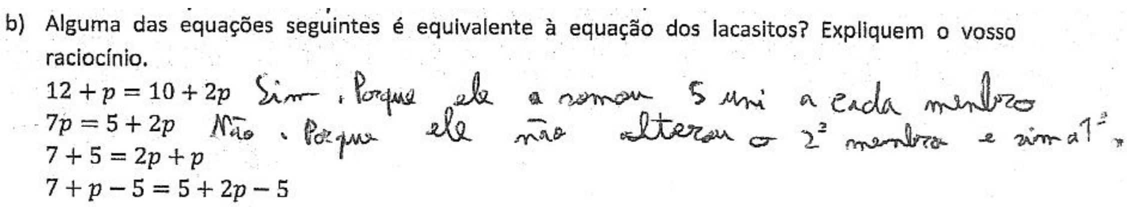
Figura 33 – Equações III, questão 4, Par 4.

Na entrevista, interpretei que o que terá levado o Par 4 a escrever a equação ‘x x 2 = 10’ terá sido o facto o enunciado dizer que o Marco tinha o dobro do dinheiro da Alice mais 10 euros, no entanto, ao escreverem apenas ‘x x 2 = 10’ os alunos deixaram escapar a quantia que a Alice tinha, facto que corrigiram na equação que escreveram de seguida

5.2.8. Resolução de equações

Os alunos evidenciaram aprendizagens significativas ao nível da resolução de equações. Isto foi manifestado quer na obtenção de equações equivalentes umas às outras através da aplicação de regras baseadas nos princípios de equivalência, quer na obtenção da solução das equações através da aplicação das operações inversas.

Na resolução da segunda alínea da questão 2 da tarefa Guloseimas para a Páscoa, cerca de metade da turma selecionou corretamente uma das equações equivalentes à equação '7+p = 5+2p'. Foram muito poucos os alunos que selecionarem a quarta opção, isto apesar da mesma estar correta e ser mais óbvia que a primeira, quiçá porque depois de encontrarem uma opção correta os alunos passaram à próxima questão (ver figura 34).


b) Alguma das equações seguintes é equivalente à equação dos Iacasitos? Expliquem o vosso raciocínio.

$12 + p = 10 + 2p$ Sim. Porque ele a somou 5 uni a cada membro

$7p = 5 + 2p$ Não. Porque ele não alterou o 2º membro e sim o 1º.

$7 + 5 = 2p + p$

$7 + p - 5 = 5 + 2p - 5$

Figura 34 – G. Páscoa, questão 2, equações equivalentes.

A produção anterior foi realizada por um par de alunos constituído por um aluno de classificação nível 3 e uma aluna que teve sempre classificações negativas. A figura apresentada é representativa do que cerca de metade dos alunos da turma responderam a esta questão, ficando ilustrado que os alunos revelaram aprendizagens relativamente à necessidade de realizar a mesma operação a ambos os membros das equações para obterem uma equação equivalente. Este imperativo foi bastante discutido nas aulas anteriores, quer recorrendo aos exemplos das balanças, quer através das descrições feitas pelo Aluno X, da tarefa com este nome, na resolução das suas equações.

Tal como já foi referido, os alunos revelaram dificuldades em lidar com as equações possível e indeterminada e impossível, da questão 2 da tarefa Equações I no entanto, do ponto de vista da aprendizagem, saliento que todos os pares observados souberam selecionar corretamente as operações inversas necessárias para obterem expressões como '3x = 3x', 'x = x', '0x = 0x' na equação possível e indeterminada, ou '4 = 0' ou '0 = -4' na equação impossível.

Relativamente à aplicação dos princípios de equivalência, mais de metade dos pares da turma evidenciou capacidade para o fazer de forma correta, isto na resposta às três últimas alíneas da questão 1 da tarefa Mestres e guloseimas de que dou a seguir alguns exemplos.

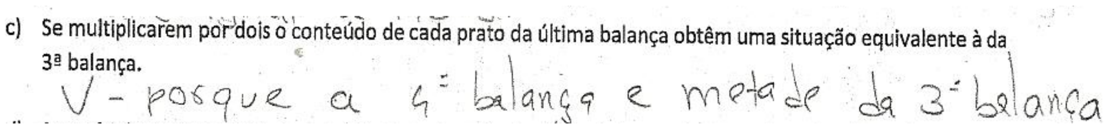

c) Se multiplicarem por dois o conteúdo de cada prato da última balança obtêm uma situação equivalente à da 3ª balança.
V - porque a 4ª balança e metade da 3ª balança

Figura 35– Mestres e guloseimas, questão 1, Par 5.

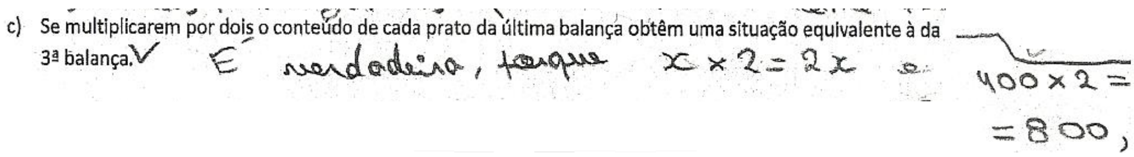

c) Se multiplicarem por dois o conteúdo de cada prato da última balança obtêm uma situação equivalente à da 3ª balança. V
E verdadeira, porque $x \times 2 = 2x$ e $400 \times 2 =$
$= 800$,

Figura 36- Mestres e guloseimas, questão 1, Par 4.

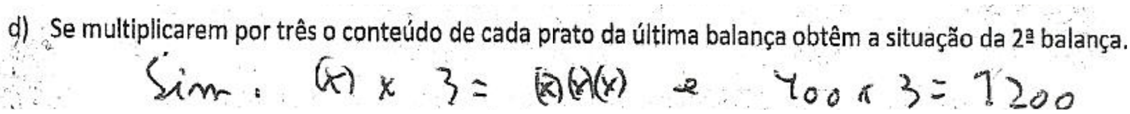

d) Se multiplicarem por três o conteúdo de cada prato da última balança obtêm a situação da 2ª balança.
Sim: (x) x 3 = (x)(x)(x) e 400 x 3 = 1200

Figura 37 - Mestres e guloseimas, questão 1, Par 2.

Esta última afirmação, alínea d), é falsa porque o que se obtém multiplicando por três o conteúdo dos pratos da última balança é uma situação equivalente à da 2ª balança, mas que não é uma situação igual (ver figura 38). Porém, as produções dos alunos apresentadas evidenciam aprendizagem ao nível da aplicação dos princípios de equivalência. Nas folhas de "Registo de aprendizagens e dificuldades" eu, o meu colega de mestrado, o professor cooperante e o professor coorientador, na coluna referente às aprendizagens, assinalámos que os alunos conseguiram identificar transformações de equivalência entre equações, aplicar os princípios de equivalência e resolver equações.

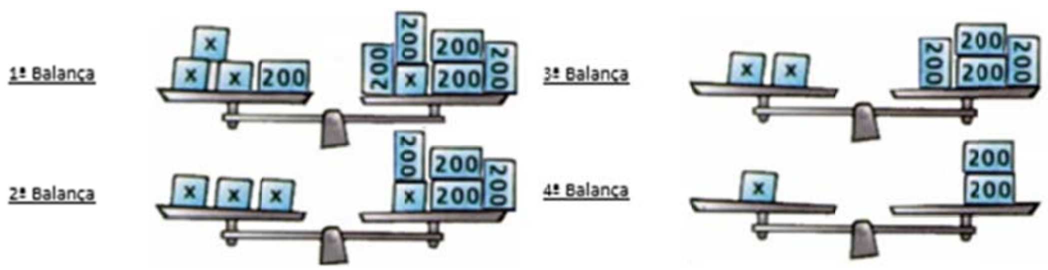


Figura 38 - Mestres e guloseimas, balanças.

Outra evidência que deteto na análise às produções dos alunos em torno da tarefa Mestres e guloseimas é o recurso à aplicação das operações inversas para resolver as equações, quase metade dos pares de alunos da turma, seis pares para ser preciso, procedeu dessa forma para resolver a equação da questão 2 (ver figura 39).

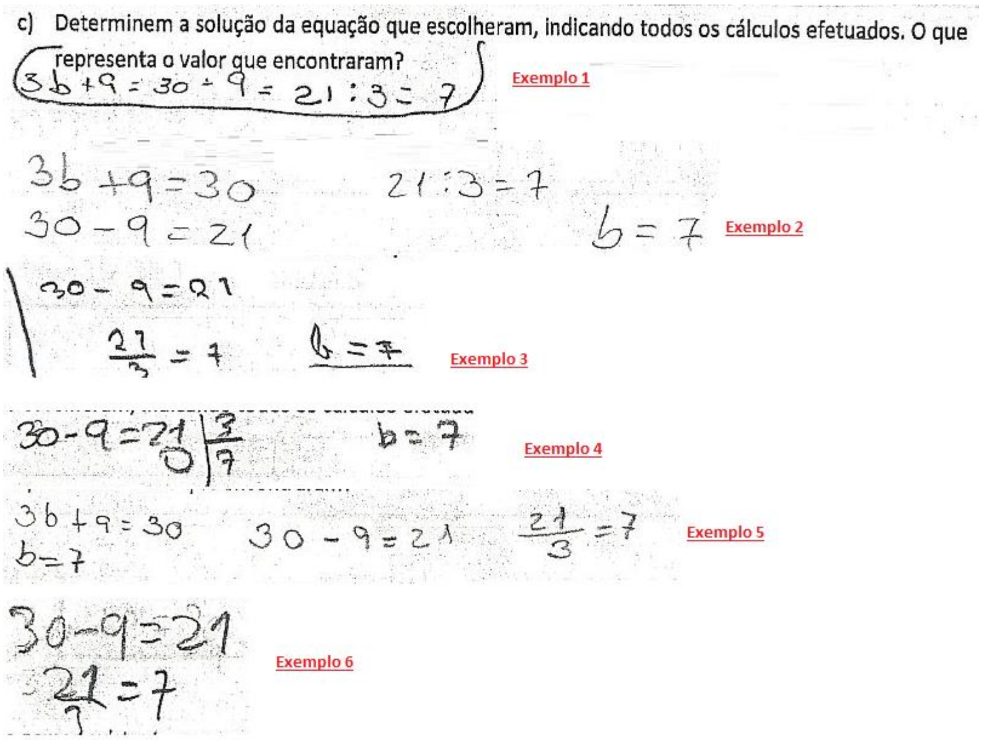
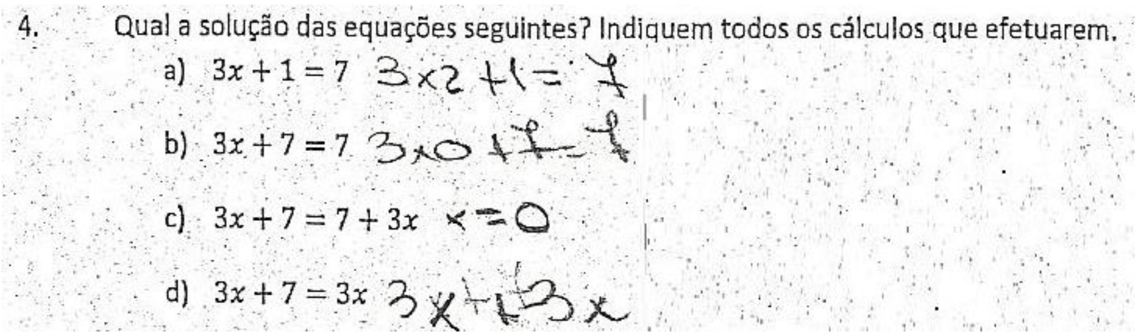


Figura 39 - Mestres e guloseimas, questão 2, pares diversos.

Constata-se que fora do ambiente *Solver*, os alunos procederam de forma informal e foram aplicando operações inversas até encontrarem a solução das equações. Refira-se que a equação da questão 2 ‘3b+9 = 30’ permitiu a realização destes procedimentos porque só tinha um monómio com incógnita. Creio que se a equação tivesse, por exemplo, monómios com incógnita nos dois membros, os alunos dificilmente a resolveriam as equações como o fizeram.

No exemplo 1, já visto anteriormente, o aluno apresentou uma representação horizontal da resolução da equação utilizando o sinal de igual para “ligar” resultados de cálculos e chegou à solução da equação, ‘7’, a qual não foi destacada nem justificado o que representava esse valor. A justificação pedida também não foi realizada pelos outros alunos e apenas nos exemplos 3 e 4 existe algum destaque da solução da equação.

Na resolução das equações do TPC II, a maioria dos alunos apresentou um grau de correção aceitável no exemplo seguinte, da resolução efetuada por um aluno, verificamos que este encontra a solução das equações usando um processo consistente assente na verificação de soluções que terá, eventualmente, obtido mentalmente, porém o aluno não indica qual a solução respetiva de cada equação (ver figura 40).



4. Qual a solução das equações seguintes? Indiquem todos os cálculos que efetuarem.

a) $3x + 1 = 7$ $3 \times 2 + 1 = 7$

b) $3x + 7 = 7$ $3 \times 0 + 7 = 7$

c) $3x + 7 = 7 + 3x$ $x = 0$

d) $3x + 7 = 3x$ $3x + 1 = 3x$

Figura 40 - TPC II, questão 4, resolução de equações.

Regra geral, os pares cujas interações com o *Solver* foram filmadas também revelaram destreza e correção na resolução das equações da tarefa Equações II.

Nas entrevistas realizadas, os alunos mostraram também serem capazes de resolver as equações da tarefa Equações III, isto aplicando as regras baseadas em princípios de equivalência. Veja-se a seguir o diálogo com o Par 5 que apresento como exemplo:

Par 5, questão 2:

H: A primeira equação [6x = 12x] é equivalente a 2x+4 = 10+2x?

A: Eu acho que não porque não podemos somar coisas diferentes.

O: Não podemos somar golfinhos com ursos.

H: E a seguinte [x+2 = 5+x] é equivalente a 2x+4 = 10+2x?

A: Eu acho que é [equivalente] porque metade de 2x é x, metade de 4 é 2, metade de 10 é 5 e metade de 2x é x.

H: O que fizemos?

A: Dividimos por 2.

5.2.9. Outras aprendizagens

Na resolução da tarefa Equações I, três dos pares observados revelaram aprendizagens que lhes permitiram completar o quadro existente na folha de cálculo do *Solver* com as descrições pedidas na resolução das equações, mostrando compreensão das regras baseadas nos princípios de equivalência. (ver figura 41).

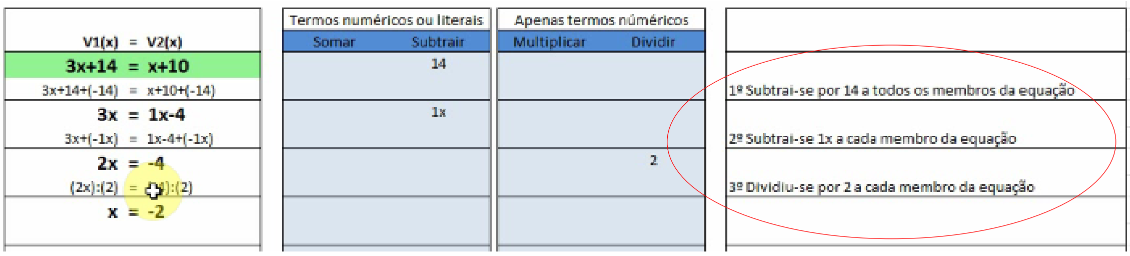


Figura 41 – Equações I, questão 1, Par 4.

Seguidamente ilustro a resposta do Par 4 à alínea b) da primeira questão da tarefa [Mestres e guloseimas] (ver figura 42). Destaco esta resposta porque este par de alunos evidencia ter adquirido a conceção de que uma equação traduz uma situação de equilíbrio, sendo o sinal '=' aquele que "anuncia" esse estado de equilíbrio.

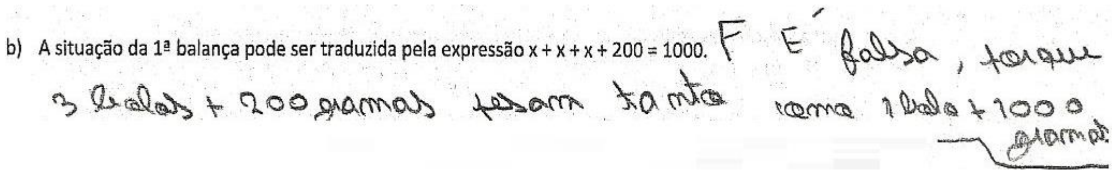


Figura 42 – Mestres e guloseimas, questão 1, Par 4.

Na justificação deste aluno, a expressão "pesam tanto como" evidencia a noção de equilíbrio que referi.

O sinal de igual deixa de ser apenas um símbolo associado a uma sequência de cálculos para passar também a ser um símbolo relacional. Este uso do sinal de igual como significativo de uma situação de equilíbrio é igualmente notado na produção do Par 5, o qual substitui a incógnita por 400 e verifica que existe uma desigualdade (ver figura 43)

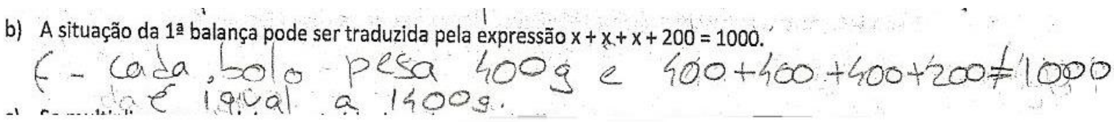


Figura 43 – Mestres e guloseimas, questão 1, Par 5

Houve outros pares que revelaram possuir a ideia de que o sinal de igual traduz uma situação de equilíbrio, no entanto parte dos alunos da turma apenas comparou o conteúdo da balança com os termos da equação (ver figura 44).

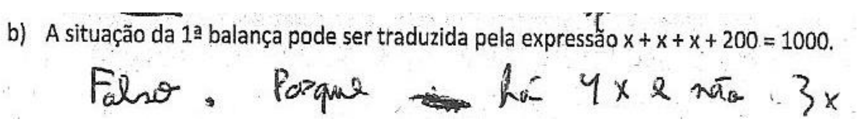


Figura 44 – Mestres e guloseimas, questão 1, Par 2.

A resposta apresentada por este aluno está correta. E a sua justificação, “Porque há 4x e não 3x”, comprova que o aluno comparou a quantidade de cubos designados por ‘x’ existentes em cada prato da balança (ver figura 45), com a equação ‘x+x+x+200 = 1000’.

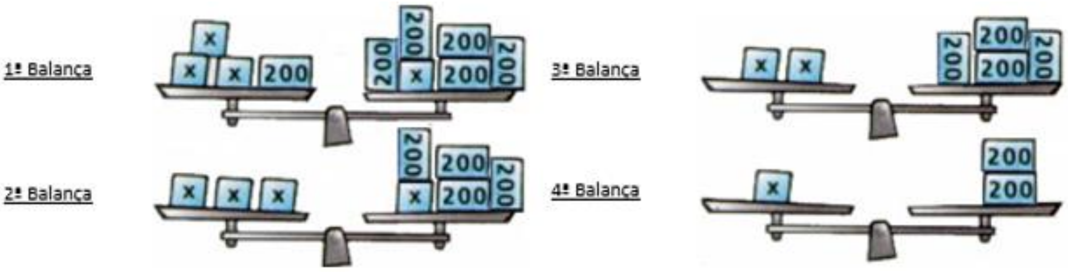


Figura 45 - Mestres e guloseimas, balanças.

Além das aprendizagens descritas, os alunos evidenciaram igualmente terem realizado uma boa apropriação da linguagem formal associada ao estudo das equações, tendo isso mesmo sido registado nas minhas folhas de “Registo de aprendizagens e dificuldades” e nas do professor cooperante.

5.3. Mini-Teste

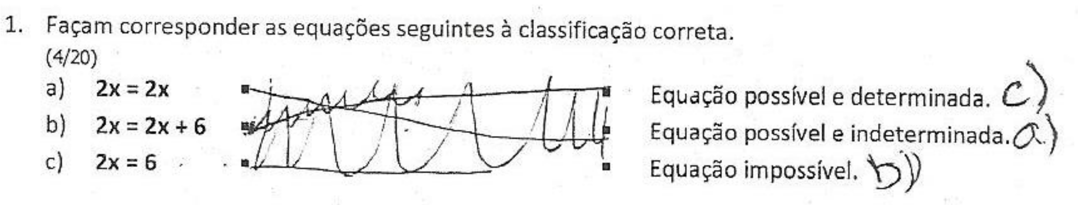
O Mini-Teste realizado por 14 pares de alunos na última aula da minha intervenção teve como objetivo aferir que aprendizagens os alunos realizaram e que tipos de dificuldades ainda persistiam. O Mini-Teste foi constituído por quatro questões e para as resolver os alunos necessitavam de mobilizar conhecimentos referentes à classificação de equações, equivalência de equações, resolução de equações e tradução algébrica de problemas. Seguidamente é apresentada uma tabela com a síntese das produções dos alunos (tabela 4).

Tabela 4 – Síntese das produções dos alunos no Mini-Teste.

Conteúdos	Aprendizagens	Dificuldades
Classificação de equações	Onze pares de alunos associaram corretamente, as três equações do enunciado às suas classificações respetivas.	Três pares de alunos não associaram corretamente as equações à sua classificação. Dois desses pares identificaram corretamente a equação impossível e o outro par identificou corretamente a equação possível e indeterminada.

Conteúdos	Aprendizagens	Dificuldades
Equivalência de equações	Seis pares de alunos identificaram corretamente que a equação ‘2x+4 = 10+ 14x’ não era equivalente à equação ‘2x+14x = 10 + 4’. E seis pares de alunos, não exatamente os mesmos, identificaram corretamente que a equação ‘2x+4 = 10+ 14x’ era equivalente à equação ‘x+2 = 5 + 7x’.	Oito pares de alunos selecionaram erradamente a equação ‘2x+14x = 10 + 4’, como sendo equivalente à equação ‘2x+4 = 10+ 14x’, evidenciando a dificuldade na transposição de termos da equação. Oito pares de alunos, não exatamente os mesmos, não conseguiram identificar que a equação ‘2x+4 = 10+ 14x’ era equivalente à equação ‘x+2 = 5+ 7x’, não conseguido verificar que a segunda era obtida da primeira dividindo-a por ‘2’.
Resolução de equações	Nove dos catorze pares de alunos conseguiu manipular corretamente os parêntesis da equação 3(2x+1) + 3 = 2x +2.	Onze pares de alunos não conseguiram resolver de forma totalmente correta a equação 3(2x+1) + 3 = 2x +2. Os erros mais verificados foram: ○ Oito pares concluíram erradamente a resolução da equação. ○ Cinco pares usaram de forma incorreta os parêntesis. ○ Três pares adicionaram incorretamente termos semelhantes. ○ Um par adicionou incorretamente termos não semelhantes. ○ Um par errou um cálculo ao dividir a equação por ‘2’
Tradução algébrica	Das três equações enunciadas, oito dos catorze pares identificaram corretamente uma das duas equações que podiam traduzir o problema enunciado.	Nenhum par conseguiu identificar que havia duas equações que traduziam corretamente o problema. Seis pares não conseguiram identificar nenhuma das duas equações que traduziam corretamente o problema.

A análise das produções dos alunos no Mini-Teste sugerem que a generalidade dos alunos aprendeu a classificar as equações uma vez que, na questão 1, fizeram as correspondências corretas. Dou um exemplo na figura 46, em que, no entanto, o aluno começou por responder incorretamente nas alíneas b) e c). Porém, estes resultados devem ser vistos com alguma reserva, pois o facto de ser pedido aos alunos que façam correspondências pode limitar um pouco a ocorrência de erros. Sobretudo quando as correspondências são “um a um”, ou seja, a cada equação correspondia uma e uma só hipótese de classificação.


1. Façam corresponder as equações seguintes à classificação correta.
(4/20)
a) 2x = 2x
b) 2x = 2x + 6
c) 2x = 6

Equação possível e determinada. c)
Equação possível e indeterminada. a)
Equação impossível. b)

Figura 46 – Mini-Teste, questão 1.

Mais de metade da turma selecionou a equação ‘2x+4 = 10+14x’ como sendo equivalente à equação ‘2x+14x = 10+4’, o que mostra que a transposição incorreta de termos de um membro para o outro era nesta fase uma dificuldade relevante. Quanto aos princípios de equivalência, constata-se que quase metade da turma conseguiu identificar que a equação ‘x+2 = 5+ 7x’ obtinha-se da equação ‘2x+4 = 10+ 14x’ dividindo os seus membros por ‘2’, o que mostra compreensão por parte significativa dos alunos (ver figura 47).

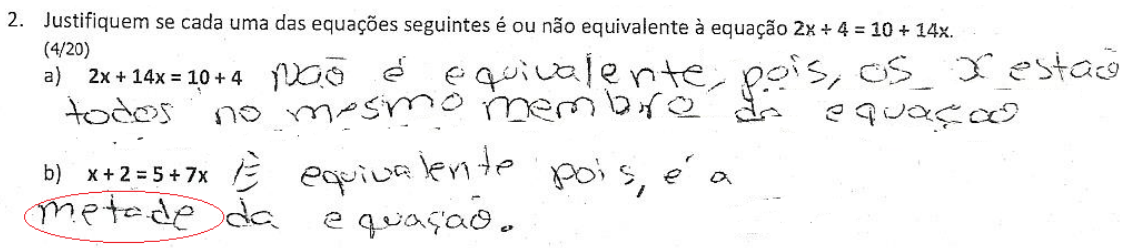

2. Justifiquem se cada uma das equações seguintes é ou não equivalente à equação 2x + 4 = 10 + 14x.
(4/20)
a) 2x + 14x = 10 + 4 não é equivalente, pois, os x estão todos no mesmo membro da equação
b) x + 2 = 5 + 7x É equivalente pois, é a metade da equação.

Figura 47 – Mini-Teste, questão 2.

Na resposta à alínea a) o aluno indica corretamente que as equações não são equivalentes, mas apresenta uma justificação incorreta. Creio no entanto que o que levou o aluno a afirmar que a equação não era equivalente foi, possivelmente, ter identificado a ocorrência de uma transposição incorreta dos termos da equação, isto porque este tipo de erro foi bastante discutido em aulas anteriores Na resposta à alínea seguinte o aluno, também corretamente, indica que as equações são equivalentes e evidência, na sua justificação, compreender a aplicação dos princípios de equivalência, isto apesar de não ser formalmente correto afirmar que uma equação é “metade” da outra.

Relativamente ao uso dos parêntesis, a maioria dos alunos conseguiu aplicar corretamente a propriedade distributiva, porém dado esse passo, poucos foram os alunos que conseguiram concluir corretamente a resolução da equação, ou porque erram algum cálculo ou porque bloquearam e não terminaram a resolução (ver figura 48).

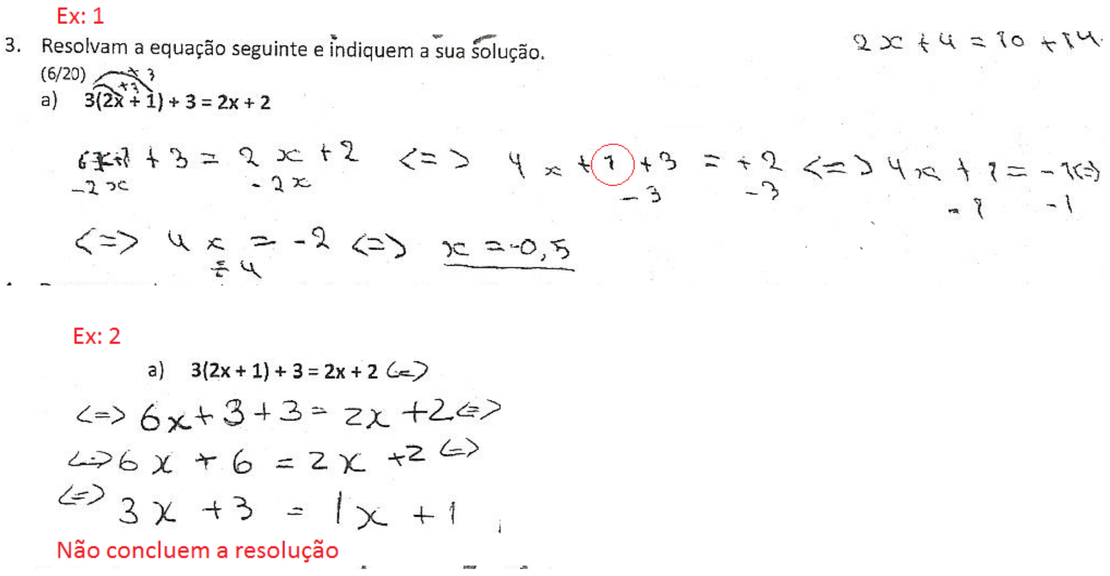
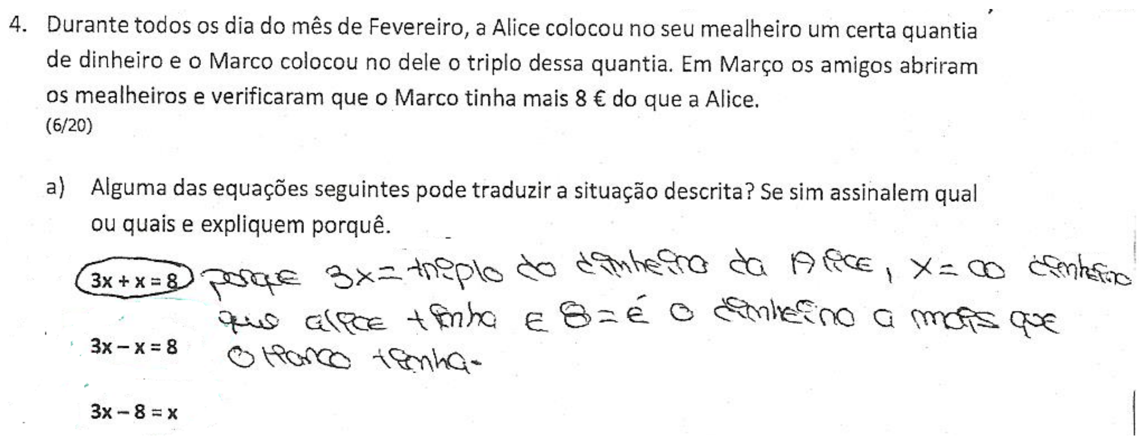


Figura 48 – Mini-Teste, questão 3.

A tradução algébrica da questão 4 do Mini-Teste foi conseguida por mais de metade dos pares da turma, no entanto nenhum conseguiu identificar que havia duas opções corretas. É minha convicção de que tal se deve ao facto de os alunos, no seu processo de ensino e aprendizagem, estarem eventualmente habituados a que haja apenas uma resposta correta e raramente duas, ou porque poderia não ser claro para eles o significado do “qual” ou “quais” do enunciado. Dos alunos que selecionaram a equação que não poderia traduzir o problema enunciado, três conseguiram descrever corretamente o que significava cada monómio, evidenciando assim compreensão do significado da incógnita (ver figura 49).



4. Durante todos os dia do mês de Fevereiro, a Alice colocou no seu mealheiro um certa quantia de dinheiro e o Marco colocou no dele o triplo dessa quantia. Em Março os amigos abriram os mealheiros e verificaram que o Marco tinha mais 8 € do que a Alice.
(6/20)

a) Alguma das equações seguintes pode traduzir a situação descrita? Se sim assinalem qual ou quais e expliquem porquê.

$3x + x = 8$ porque $3x$ = triplo do dinheiro da Alice, x = o dinheiro que alice tinha e 8 = é o dinheiro a mais que o Marco tinha.

$3x - x = 8$

$3x - 8 = x$

Figura 49 – Mini-Teste, questão 4.

5.4. Análise ao contributo do *Solver*

O contributo do *Solver* para a aprendizagem das equações do 1.º grau pode ser analisado em duas vertentes distintas, uma referente aos aspetos práticos do trabalho realizado pelos alunos, como seja o *feedback* fornecido, a facilidade de navegação ou o foco que o programa coloca nas operações. Outra do ponto de vista motivacional, nomeadamente no que ao interesse que desperta nos alunos diz respeito

Em relação aos aspetos da utilização do *Solver*, foram analisados os vídeos da interação dos alunos com o programa e também excertos das entrevistas realizadas. Para a análise relativa aos aspetos motivacionais utilizei os dados obtidos a partir dos questionários efetuados aos alunos.

Analisando os vídeos referentes às produções dos alunos na resposta à questão 5 da tarefa Aluno X, a qual solicitava a resolução de duas equações, verifico que o Par 2 procura somar ‘5’ ao monómio ‘-5x’ para obter ‘x’. Faço notar que este par de alunos, após verificar que não obteve a simplificação pretendida, “navegou nas folhas de cálculo do *Solver* e, seguidamente, fez uma nova inserção no *Solver* (subtrair ‘10’ a cada membro) que, desta vez, conduziu à obtenção de uma equação mais simples. Todos os outros pares de alunos analisados procederam de forma análoga, ou seja, tentaram adicionar termos não semelhantes e, após verificarem que não tinham obtido o resultado pretendido, apagaram a inserção anterior e reiniciaram a resolução da equação. O Par 1 começou por subtrair ‘-5’ à expressão ‘-5x+10’, o Par 3 tentou subtrair ‘5’ a ‘5x’ e o Par 6, após subtrair ‘10’ à expressão ‘-5x+10’, subtraiu ‘5x’ a ‘5x’, tendo obtido ‘0x’ no primeiro membro da equação. Assinalo aqui o benefício da tecnologia na aprendizagem das equações do 1.º grau, concretizado neste caso pelo *feedback* imediato que o *Solver* dá aos alunos. Isso mesmo é ilustrado no exemplo seguinte onde são apresentados dois momentos de preenchimento da folha de cálculo do *Solver* (ver figura 50).

Figura 50 – Aluno X, questão 5, Par 2 (I).

Este procedimento de navegar pelas folhas de *Excel* consultando as informações já existentes foi comum a todos os pares analisados. A navegação fácil e a rápida consulta dos dados obtidos em questões anteriores, constituem-se como outras das vantagens da utilização deste programa. Apresento na figura seguinte uma ilustração, onde se mostra novamente que estes alunos utilizaram o *feedback* proporcionado pelo *Solver* para substituir a divisão dos termos da equação por ‘5’ por uma divisão por ‘-5’ (ver figura 51).

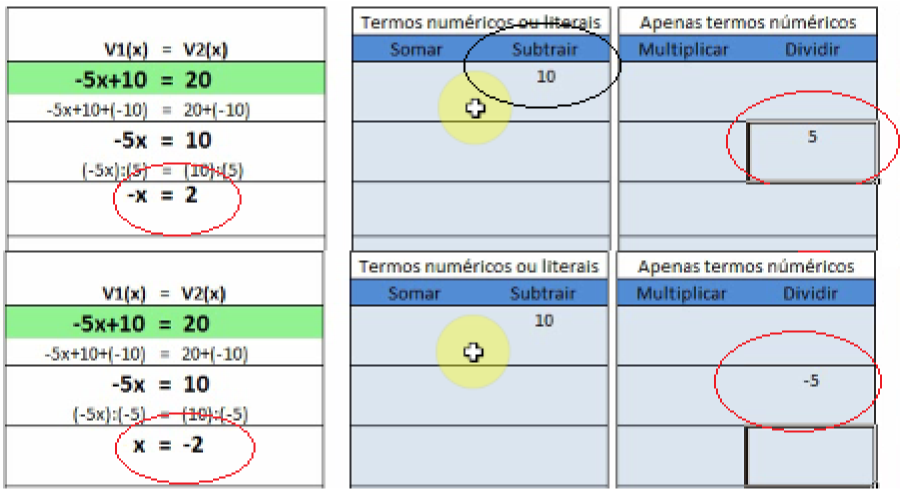


Figura 51 – Aluno X, questão 5, Par 2 (II).

Refira-se que é visível nas filmagens analisadas, o facto de o *Solver* focar a atenção dos alunos nas quatro operações a realizar com os membros das equações de forma a obterem equações mais simples. Destaco o Par 4 que navega durante alguns momentos pelas células do *Solver* relativas às operações, isto na resolução da equação ‘10x+11 = 11x+10’ referente à questão 5 da tarefa Aluno X (ver figura 52).

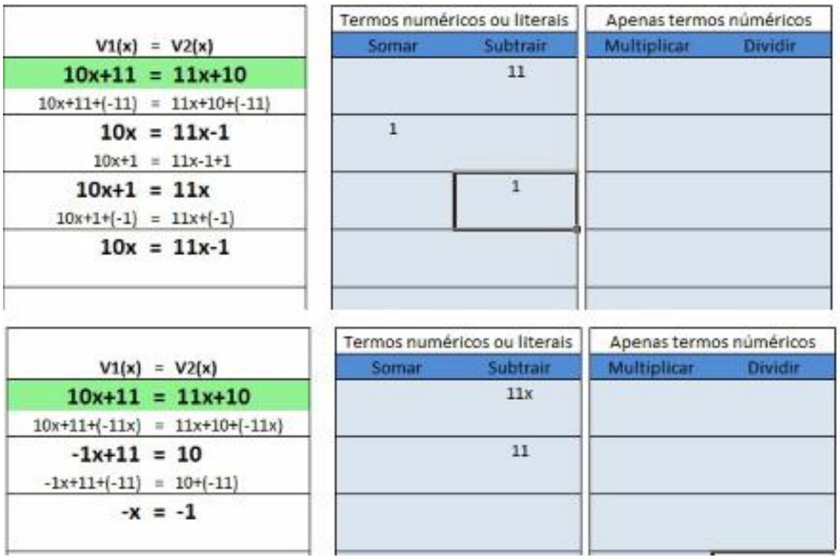


Figura 52 – Aluno X, questão 5, Par 4.

Na segunda aula em que trabalharam com o *Solver*, foram já poucas as vezes que os alunos tentaram subtrair o coeficiente de um termo em ‘x’ para obter ‘x’. A valia do *feedback* fornecido pelo *Solver* e o foco que coloca nas quatro operações disponíveis, também foi verificada na observação das filmagens das interações dos alunos com o *Solver,* as quais mostram que navegaram bastante pelas folhas de cálculo e que tentaram relacionar as resoluções que iam fazendo umas com as outras. As filmagens mostram igualmente que os alunos navegaram demoradamente pelas células das operações, procurando perceber qual a operação que deveriam selecionar. Selecionada a operação verificaram se a inserção que faziam era útil e, se necessário, voltavam atrás, apagavam a inserção anterior e faziam outra mais útil para a simplificação da equação. Na figura seguinte apresento um exemplo com dois momentos da resolução de uma equação pelo Par 6, na qual se verifica o processo que acabo de descrever.

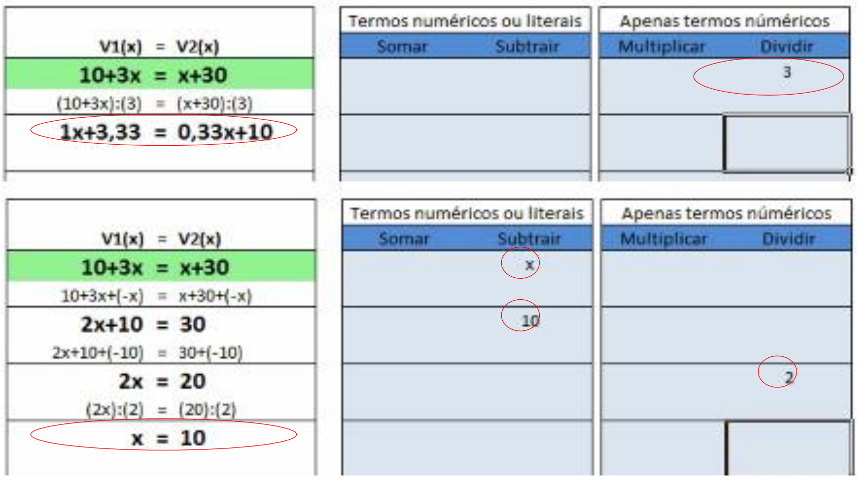


Figura 53 – Equações I, questão 1, Par 6.

O facto de o *Solver*, de forma automática apresentar equações equivalentes resultantes das inserções efetuadas pelos alunos, também beneficiou a compreensão dos monómios das equações e da própria equação como um todo, ou seja, os alunos por várias vezes verificaram que não podiam "retirar" 'a' a 'ax' por intermédio de uma subtração ou que, tal como no exemplo anterior, numa equação dividir o monómio '3x' por '3' obriga também a dividir por '3' todos os termos da equação, divisão essa que, tal como mostrado, nem sempre origina uma equação mais simples.

Nas entrevistas, também ficou patente que o trabalho desenvolvido em ambiente tecnológico liberta aos alunos para explorar várias possibilidades e para aproveitar o feedback obtido para efetuar reversões das suas resoluções, focando-os na seleção das operações que de facto originam a obtenção de equações equivalentes mais simples. O facto de a aluna do Par 5 referir que retiraria '3', quando a questiono o que fariam se estivessem a resolver a equação '9x = 3' no *Solver*, mostra que o programa ajudou os alunos a focarem-se nas operações disponíveis para resolver as equações.

Na entrevista ao Par 2, da qual apresento de seguida alguns extratos referentes à resolução da questão 2 da tarefa Equações III, é evidente este foco nas operações proporcionado pelo *Solver*.

Par 6, questão 2:

H: E a equação x+2 = 5+x é equivalente à equação 2x+4 = 10+2x? No *Solver* tenho uma equação como obtenho outra que lhe seja equivalente? O que podemos fazer?

A: Podemos somar, dividir, multiplicar, subtrair.

H: O que aconteceu de uma equação para outra?

O: Dividiu-se por 2. São equivalentes.

H: E 2x+2x = 10+4 é equivalente a 2x+4 = 10+2x?

O: Não, não podemos meter os x's num membro e os números noutro.

H: Porquê?

O: Não sei, mas acho que não se pode.

H: O que retirámos ao primeiro membro da equação [2x+4 = 10+2x] para chegar ao primeiro membro desta equação [2x+2x = 10+4]?

O: Retirámos 4.

H: Então e no *Solver* como ficaria?

O: Ficava 2x = 6 + 2x. Não são equivalentes.

Para compreender de que forma os alunos percecionaram e experienciaram a utilização do *Solver* no processo de ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau, elaborei um questionário (anexo II) com três questões ao qual responderam individualmente e por escrito 11 alunos, os restantes não entregaram o questionário. Uma dessas três questões, a segunda, era de resposta aberta. É apresentada de seguida a compilação das respostas dadas pelos alunos às questões um e três do questionário e uma análise das mesmas (ver tabela 5 e tabela 6).

Tabela 5 - Questionário, questão 1, "aspetos em que o Solver ajudou mais e menos".

Aspetos		N.º alunos que respondeu '+' Ajudou-me mais	N.º alunos que respondeu '-' Ajudou-me menos
a)	Compreender o que é a incógnita.	9	2
b)	Classificar equações.	9	2
c)	Compreender o que são equações equivalentes.	10	1
d)	Resolver equações.	10	1
e)	Verificar a solução das equações.	4	7
f)	Compreender o significado da solução.	5	6
g)	Despertar o interesse pela aula.	10	1
h)	Outro.	Zero alunos	

Tabela 6 - Questionário, questão 3, "que afirmação melhor corresponde à tua opinião".

Opinião		N.º de alunos com esta opinião
a)	O *Solver* não me ajudou nada na minha aprendizagem de equações.	Zero alunos
b)	O *Solver* ajudou pouco na minha aprendizagem de equações.	Zero alunos
c)	O *Solver* deu-me uma ajuda razoável na minha aprendizagem de equações.	6
d)	O *Solver* ajudou-me muito na minha aprendizagem de equações.	5

Observando as respostas dos alunos à questão 1 do questionário, verifica-se que os aspetos ligados à compreensão, à resolução de equações e ao interesse despertado, foram escolhidos por 10 dos 11 alunos que responderam às questões, como sendo aspetos em que o *Solver* mais os ajudou. Os aspetos em que o *Solver* parece ter ajudado menos os alunos foram a verificação da solução das equações e a compreensão do seu significado. As respostas dadas pelos alunos confirmam que, a utilização do *Solver* foi bastante profícua na compreensão dos princípios de equivalência e que o foco que coloca nas operações foi uma mais-valia na aprendizagem da resolução de equações. Antecipando algumas das fragilidades do *Solver* que serão levantadas na secção 6 "Reflexão final", as respostas dos alunos mostram que o facto de o *Solver* não evidenciar a solução das equações, não os beneficiou em termos da compreensão do significado da solução da equação no contexto e que a verificação da solução das equações, também não é trabalhada no programa.

Na resposta à questão 3, todos os alunos assinalaram que o *Solver* contribuiu para a sua aprendizagem, seis indicaram que esse contributo foi razoável e cinco indicaram que esse contributo foi substancial. Estes resultados são bastante elucidativos de que, de facto, os alunos percecionaram a experiência de aprendizagem da equações do 1.º grau com recurso ao *Solver* como bastante útil e produtiva.

Relativamente à questão 2 que pedia aos alunos que descrevessem um pouco a sua experiência de aprendizagem de equações com o *Solver*, é possível identificar alguns aspetos que, de forma geral, foram referidos nas respostas obtidas. Todos os alunos afirmaram terem tido uma experiência que foi do seu agrado. Seis dos onze alunos que preencheram o questionário referem que a experiencia vivida foi "divertida", "motivante" ou "interessante". Em relação aos aspetos relacionados com a compreensão, quatro alunos referiram que o *Solver* contribuiu para que compreendessem como se resolviam equações, dois dos quais mencionaram que o *Solver* os ajudou a perceber que operações teriam de utilizar em cada caso. Três alunos referiram ainda os aspetos da facilidade e rapidez proporcionados pelo *Solver* na obtenção de equações equivalentes.

Seguidamente, apresento ilustrações de algumas respostas de alunos à questão 2 do questionário, onde são evidenciados alguns dos aspetos que mencionei terem sido destacados pelos alunos. Com a apresentação destes exemplos, também fica visível a capacidade dos alunos em expressarem aquilo que foi a sua experiência de trabalho com o *Solver*

2. Descreve um pouco como foi a tua experiência de aprender as equações com a utilização do Solver.

A minha experiência foi ótima.
Ser trabalhado com o Solver tornou a matéria
mais interessante e divertida, porque trabalhei no
computador e é divertido trabalhar no computador.
Também me ajudou a saber que operações tinha
de fazer consoante os casos.
Utilizar os computadores é uma estratégia para
motivar os alunos.

Figura 54 - Questionário, questão 2, exemplo 1.

Nesta resposta em que o aluno diz que teve uma “ótima” experiência com o *Solver,* que o programa “tornou a matéria mais interessante e “divertida”, é bastante evidente a gratificação que o aluno sentiu no trabalho realizado, bem como que o programa teve um importante contributo para que o aluno conseguisse selecionar corretamente as operações que deveria utilizar com os membros da equação. No exemplo seguinte, de resposta de outro aluno, o foco nas operações é novamente referido assim como a constatação de que trabalhar com o *Solver* foi uma “boa” experiência.

A minha experiência foi boa porque me
ajudou a perceber como se resolviam as
equações e que operações tinha de
efetuar.

Figura 55 - Questionário, questão 2, exemplo 2

Os exemplos seguintes, mostram também a satisfação que os alunos sentiram no trabalho com o *Solver*, especificando que o programa “facilita” a resolução das equações porque efetua os cálculos forma automática — “faz as contas por nós” — ajuda a “perceber” o que estão a estudar e que, -— “ sem dúvida”, é um programa a ser utilizado nas aulas para que estas sejam mais “dinâmicas” e “atrativas” do que as “aulas normais”.

O Solver é um programa que facilita a resolução das equações. De facto, é muito mais fácil com o programa pois este resolve as contas por nós.
É sem dúvida um programa que deveríamos usar nas aulas mais frequentemente.

Aprender as equações com o solver foi diferente e ajudou-me bastante a perceber como resolver as equações e a perceber o que era a incógnita.
Uma aula dinâmica acaba sempre por ser muito mais atrativa do que as "aulas normais".

Figura 56 - Questionário, questão 2, exemplos 3 e 4.

6. Reflexão final

6.1. O estudo de cariz investigativo

6.1.1. Dificuldades dos alunos

A análise dos dados, recolhidos durante a minha intervenção letiva, permite-me assumir algumas conclusões acerca das dificuldades sentidas pelos alunos quando iniciam o estudo das equações do 1.º grau. A primeira diz respeito à transição da Aritmética para a Álgebra que não é imediata, exige tempo e é campo de erros frequentes, nomeadamente nas operações com monómios. Quando os alunos efetuam uma adição de termos não semelhantes, o que está em causa, na minha opinião, é o facto de na Aritmética todos "os termos serem semelhantes", ou seja, os alunos lidam apenas com números e todos eles são "somáveis". Na passagem para a Álgebra passam a lidar com números e letras e a operar com uns e com outros "isolados" ou "juntos" em monómios. Nas operações algébricas surgem regras mais restritivas e nem todos os termos são semelhantes, ora isto foi uma novidade e gerou dificuldades para os alunos do 7.º C

Outra grande dificuldade, que atinge e influencia outras dificuldades, tem a ver com abstração que vive no coração da Álgebra e do pensamento algébrico. Para os alunos do 7.º C uma letra sempre foi uma letra, no entanto, quando iniciaram o estudo das equações do 1.º grau, foram confrontados com letras que representam quantidades ou valores misteriosamente desconhecidos, novamente, isto foi uma novidade e deu origem a dificuldades na interpretação dos monómios, na interpretação da linguagem algébrica e na matematização de situações utilizando essa linguagem.

Relacionadas com o que digo atrás, estão também as dificuldades que os alunos manifestaram na resolução de equações: persistiram em alguns erros, como tentar subtrair o coeficiente dos monómios com incógnita, e tiveram dificuldades recorrentes, como o lidar com equações que tinham a incógnita em ambos os membros da equação. Isto explica-se, na minha opinião, com o facto de os monómios com incógnita serem uma entidade nova e estranha para os alunos. Também foi evidente que, de forma persistente, muitos alunos tiveram dificuldades em entender o conceito de incógnita e, em consequência, em interpretar o significado das incógnitas no contexto dos problemas, o que limitou a sua capacidade para matematizar situações e para interpretar expressões algébricas. A noção de solução de uma equação também representou uma dificuldade para os alunos, foi visível nas suas produções que esta é uma noção que precisa ser trabalhada, na maioria dos casos, ao resolverem as equações, os alunos não indicaram quais as soluções das equações ou qual o seu significado nos contextos respetivos.

É minha convicção que é na passagem da Aritmética para a Álgebra, com uma linguagem e regras distintas e do Concreto para o Abstrato, que são originadas praticamente todas as dificuldades sentidas pelos alunos. Na Álgebra passa-se a lidar com objetos matemáticos que, para além de serem mais abstratos, são mais complexos. As restantes dificuldades sentidas pelos alunos relacionam-se, no meu entender, com dificuldades que de alguma forma já manifestavam, nomeadamente ao nível das operações aritméticas, ou da utilização dos parêntesis, ou do raciocínio no conjunto dos números racionais.

6.1.2. Aprendizagens dos alunos

Ao nível das aprendizagens que os alunos evidenciaram, começo por destacar a capacidade manifestada pelos alunos do 7.º C em apropriarem-se da linguagem formal associada ao estudo das equações do 1.º grau. Surpreendeu-me que rapidamente os alunos incorporassem no seu léxico matemático, termos como “membro da equação”, “termos da equação”, “equações equivalentes”, “equação impossível”, “incógnita”, entre outros.

Relativamente às evidências produzidas pelos dados recolhidos, creio que o uso incorreto dos parêntesis foi uma dificuldade largamente ultrapassada pela generalidade dos alunos. A compreensão de que uma equação representa uma situação de equilíbrio entre duas “grandezas” expressa pelo sinal de igual, também foi manifestada por vários alunos do 7.º C.

Em termos mais genéricos, os dados mostram que os alunos melhoraram relativamente a todas as dificuldades que foram sentindo ao longo das minhas aulas. Creio que importa realçar o facto de as melhorias manifestadas sugerirem que estes aprenderam com compreensão. Os alunos aprenderam a resolver equações, mas não se limitaram a interiorizar procedimentos mecânicos para obter equações equivalentes, e apesar de terem ficado com lacunas relativas às equações do 1.º grau, estou convicto que as aprendizagens que manifestaram evidenciaram compreensão. O argumentar com colegas que, “se retiras de um lado também tens de retirar do outro lado” revela que foi apropriado que uma equação traduz uma situação de equilíbrio e que um novo significado relacional para o sinal de igual foi conseguido. Os alunos referirem que não existem “gursos” revela que compreenderam que também na Álgebra existem “espécies” diferentes, ou seja, no que estavam a estudar, monómios não semelhantes. Também a noção de incógnita foi conseguida de forma generalizada, os alunos evidenciaram compreender que a incógnita representa uma quantidade ou valor desconhecidos.

A exploração que os alunos realizaram relativamente às equações impossíveis e às equações possíveis e indeterminadas, permitiu-lhes chegar a conclusões como “esta equação não dá” ou “esta equação tem soluções infinitas”, que, na linguagem informal que usam, mostra que os alunos entenderam o que está em questão no que se refere à solução desse tipo de equações. Tais conclusões favoreceram a compreensão de outros alunos quando, nos momentos de discussão, foram incentivados a discutir esses argumentos uns com os outros.

Creio que os alunos do 7.º C ficaram com muito por aprender mas muito do que aprenderam foi com compreensão.

6.1.3. Tecnologia

Penso que o contributo da tecnologia, neste caso particular do programa computacional *Solver*, no estudo das equações do 1.º grau realizado pelos alunos do 7.º C é bastante evidente na análise dos dados recolhidos.

Do ponto de vista da superação de dificuldades, creio que a valia da utilização do programa manifesta-se desde logo no entendimento a que os alunos conseguiram chegar relativamente ao sinal de igual. Nas resoluções de equações, apenas por uma vez um aluno utilizou erroneamente o sinal de igual. Na sua interação com o *Solver* os alunos verificaram que o sinal de igual nunca sugeriu uma sequência de cálculos da esquerda para a direita, como ocorre na Aritmética, esteve sempre presente como um sinal que relacionava as alterações que ocorriam simultaneamente à sua esquerda e à sua direita. Por isto, na minha opinião, o *Solver* foi uma ferramenta que potenciou bastante a compreensão do cariz relacional que o sinal de igual assume na Álgebra e que ajudou os alunos a superar a conceção de que o sinal de igual é apenas utilizado numa sequência de cálculos. No meu entendimento, isto constituirá uma grande ajuda na continuação do estudo da Álgebra que os alunos realizarão no futuro.

Em termos dos procedimentos algébricos que estão presentes na resolução das equações do 1º grau, o contributo do programa foi evidente. Os alunos souberam aproveitar a facilidade proporcionada pelo programa para consultar registos já efetuados, o mesmo acontecendo com o *feedback* fornecido ou com o foco que o programa colocou nas quatro operações disponíveis. O foco nas operações que o *Solver* proporciona foi fundamental para os alunos, na resolução das equações, fundarem importantes noções relativamente à aplicação de regras baseadas nos princípios de equivalência.

Em termos dos efeitos motivacionais produzidos pelo programa, a análise dos dados evidencia que os alunos gostaram e recomendam a experiência que tiveram. O *Solver* proporcionou uma aprendizagem da Matemática diferente do habitual e fomentou a criação de dinâmicas diversificadas que, agradaram bastante aos alunos.

Não sendo pretendido que a utilização do *Solver* no estudo das equações do 1.º grau seja monolítica, ou seja, o programa deve ser utilizado como um complemento dos outros meios e materiais ao dispor do professor, convém ainda assim destacar algumas daquelas que são as suas limitações. O *Solver* possui uma limitação relativa à verificação dos cálculos e das soluções das equações, isto porque os alunos ao trabalharem com o programa, naturalmente, confiaram nos cálculos que iam sendo realizados de forma automatizada e não sentiram necessidade de serem críticos relativamente aos resultados encontrados. O *Solver,* com outro tipo de programação, poderia também permitir aos alunos, de uma forma simples e automatizada, executar rotinas que lhes permitissem verificar as soluções das equações sem ter de as resolver. Referência também para a limitação que diz respeito à obtenção da solução das equações, o programa não evidencia as soluções de cada equação e é meu intuito incluir, numa próxima versão do *Solver,* uma rotina que permita evidenciar essas soluções quando os alunos terminam a resolução das equações. O programa também apresenta limitação relativamente à divisão de monómios pela incógnita, isto porque no *Excel* a divisão por letras origina erro tal como se observa na figura seguinte.

Figura 57 – Solver, divisão de monómios por incógnitas.

6.2. A experiência de lecionação

Lecionar as equações do 1.º grau aos alunos do 7.º C foi uma experiência que classifico como muito enriquecedora. Do ponto de vista do funcionamento das aulas foi muito gratificante escutar crianças de 12, 13 anos a argumentarem com os colegas, a explicarem os seus raciocínios e a reformularem as suas próprias conjeturas ou conclusões. Criar oportunidades para poder disfrutar destes momentos foi no entanto exigente, como referi os alunos do 7.º C contam com algumas participações disciplinares no seu currículo, em determinados momentos percebi que me aproximei de "perder" a turma em termos da regulação dos comportamentos. No entanto isso não aconteceu, foi necessário ser firme e, acima de tudo, saber escutar os alunos, ser justo com e ter o máximo respeito pelos seres humanos que são.

Relativamente à conceção das tarefas foi desafiante tentar criar contextos que fizessem sentido para os alunos e que, em simultâneo, os desafiassem à exploração e a novas aprendizagens. Observei-me nestes momentos de criação e pude constatar que o meu foco foram sempre os alunos, imaginei as suas reações, os seus raciocínios e as suas dificuldades. A empatia com os meus alunos foi a aliada que tive a meu lado na criação das tarefas e creio que isso fez alguma diferença.

Do ponto de vista da correção matemática, percebi a responsabilidade de participar no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, cometi alguns erros e os alunos seguiram-me, nada de irreversível, mas fica-me o alerta para a importância deste aspeto fundamental da prática profissional de ensino.

Utilizar suportes tecnológicos na sala de aula como o projetor ou os computadores foi facilitador e exigente. O projetor facilitou imenso os momentos de discussão, facilitou a perceção dos alunos relativamente ao que se estava a fazer, isto porque tinham uma projeção no quadro igual ao que constava no enunciado da sua tarefa. A mim o projetor facilitou-me a questão da escrita, não sou um prodígio em termos de caligrafia e o projetor ajudou-me a ouvir menos vezes que o meu 'f' é um 'g' ou algo pior, também a organização do quadro foi facilitada por este meio audiovisual. A exigência adveio da preparação das aulas nas salas de computadores, em todas foi preciso chegar à escola antes dos pavilhões estarem abertos, "rezar" para que a funcionária não se atrasasse, correr para a sala e, com a preciosa ajuda do colega Pedro Mateus, ligar os computadores instalar em seis deles o *BB FlashBack* e copiar para todos eles a versão do *Solver* respetiva. Tudo isto de forma frenética e sem conseguir evitar que os alunos, uma ou outra vez, tivessem que esperar à porta da sala até os preparativos serem concluídos.

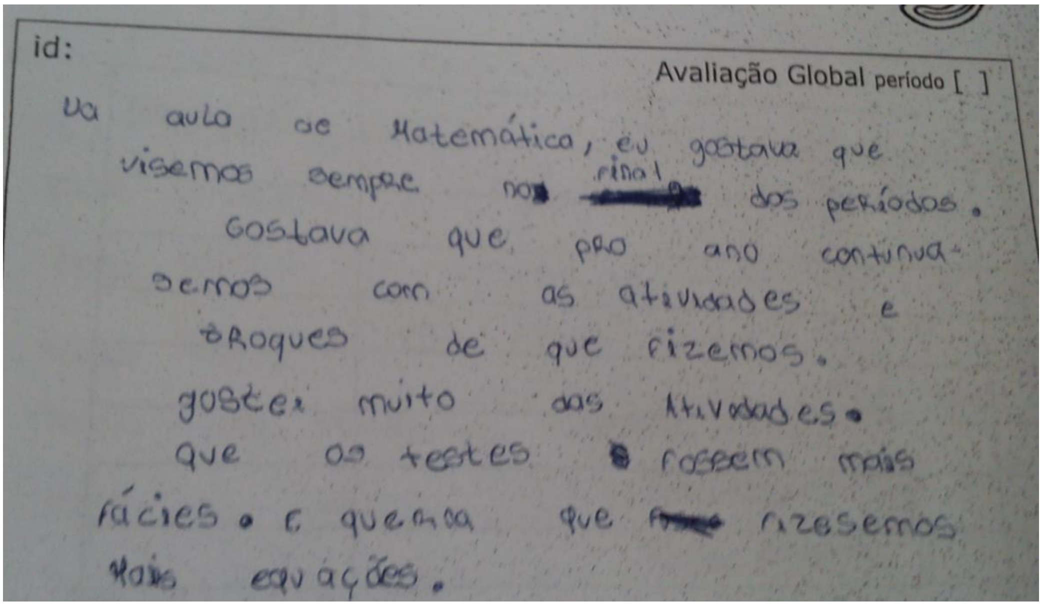
O tempo é relativo, na Física, na Matemática e na sala de aula, nunca imaginei que depois de ter frequentado algumas aulas que me pareceram durar uma eternidade, o tempo pudesse passar tão depressa quando se está do outro lado, deveras interessante. Ao preparar cada uma das aulas que lecionei procurei garantir que houvesse equilíbrio, entre os novos conteúdos a serem trabalhados e a apropriação dos mesmos que era conseguida pelos alunos. Foi precisamente esta preocupação com a apropriação de conteúdos que por vezes me fez sentir a necessidade de dedicar mais tempo à exploração ou discussão de certas questões e, em simultâneo, observava o tempo a esgotar-se sem que alguns dos objetivos previstos para a aula fossem conseguidos.

A preparação da unidade de ensino que lecionei teve um grande contributo para tudo aquilo que caracterizou a minha intervenção e foi importantíssima a revisão de literatura que fiz. O estudo das dificuldades que os alunos habitualmente sentem permitiu-me antecipar situações, provocar erros, discutir esses erros e tentar eliminar tais conceções. Foi por isto que contemplei nas tarefas, desde o início, questões que colocavam hipóteses erradas ao nível da transposição de termos de um membro para o outro, ao nível da adição de termos não semelhantes ou ao nível do significado da incógnita. Foi muito importante refletir acerca da transição da Aritmética para a Álgebra que os alunos iriam experienciar, permitiu-me estar melhor preparado para assumir uma turma no trabalho que iria fazer. Sei que na minha prática profissional futura, poderei sempre contar com aquilo que outros antes de mim experienciaram e estudaram, sei que posso contar com o conhecimento que entretanto foi construído, aceder a ele vai depender apenas da minha diligência.

Numa perspetiva temporal mais imediata, a da aula seguinte, saiu para mim reforçada a importância que o plano de aula tem para o professor. Planear requer tempo, investimento, no entanto recompensa participar numa aula que foi previamente pensada, que tem uma direção, que tem objetivos e que tem preparadas algumas estratégias que vão ajudar os alunos a superar as suas dificuldades.

Em termos retrospetivos, ficou claro para mim que a avaliação que o professor faz das produções dos alunos, das suas intervenções e da própria dinâmica das aulas, permite tomar decisões mais acertadas sobre o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Foi com base nesta avaliação reguladora, que estabeleci um fio condutor que ligou as tarefas que fui criando e as aulas que fui planeando. As tarefas que preparei encandearam-se umas nas outras e as aulas foram um espaço de analepses e prolepses constantes, onde não houve lugar a cortes ou interrupções abruptas entre conceitos. Creio que isso beneficiou os alunos.

As estratégias de ensino que segui, nomeadamente a opção por um processo de ensino e aprendizagem que privilegia a exploração, não me permitiram tirar conclusões acerca de eventuais supremacias deste método face a outros, isto em termos dos resultados classificativos dos alunos, porém, pude constatar o envolvimento dos alunos nas tarefas desenvolvidas em aula. A professora de Inglês da turma chegou a chamar-me a atenção porque alguns alunos ficavam na sala comigo a discutir dúvidas que tinham e isso atrasava-os, passei a ter atenção a este facto mas não pude deixar de registar com agrado o interesse manifestado pelos alunos. É igualmente com agrado que constato que, na avaliação global do período, um aluno mencionou que gostaria que se fizessem “mais equações” (ver figura 58).


id:

Avaliação Global período [ ]

Na aula de Matemática, eu gostava que visemos sempre no final dos períodos. Gostava que pro ano continuasemos com as atividades e broques de que fizemos. gostei muito das atividades. que os testes fosem mais fácies. e queria que fizesemos mais equações.

Figura 58 - Avaliação Global 3.º período.

Colocar os alunos no centro da minha atividade, criando tarefas para eles, criando dinâmicas de aula por eles e tentando prestar-lhes um serviço que os ajudasse a desenvolver a sua capacidade de pensar e trabalhar em Matemática, permitiu-me aprender que esta predisposição pode gerar ambientes e dinâmicas em aula com alunos interessados, alunos participativos, crianças que conversam e distraem-se, mas que regressam e envolvem-se, crianças que se divertem e que desafiam os colegas no seu estilo provocador. A turma é um corpo e quando esse corpo é motivado a ir numa determinada direção, torna-se mais difícil ser diferente para pior, os colegas não deixam. Durante as minhas aulas os alunos do 7.º C tiveram sempre muitíssimo longe das crianças indisciplinadas que me foram descritas nos concelhos de turma. A eles o meu muitíssimo obrigado!

Referências

Abrantes, P. (1985). *Planificação no Ensino da Matemática*. Acedido em http://www.netprof.pt/netprof/servlet/getDocumento?TemaID=NPL070103&id_versao=11892 a 24 de Dezembro de 2015.

Amado, N. & Carreira, S. (2008). *Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática* – diferenças na prática de sala de aula. In A.P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), Tecnologias e educação Matemática (pp. 286-299). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – Secção de Educação Matemática.

APM (1998). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bogdan, R. & Biklen S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A. & Barbosa, E. (s. d.). *Pensamento Algébrico e exploração de Padrões*. Acedido em http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf, a 24 de dezembro 2015.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A. P., & L., Santos (2012). *Explorar tarefas matemáticas*. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Orgs.), *Investigação em Educação Matemática. Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99-104). Portalegre: SPIEM. Acedido em http://www.rdpc.uevora.pt/bitstream/10174/8305/1/Canavarro%20%26%20Santos%20EIEM2012.pdf a 24 de Dezembro de 2015.

Chazan, D. & Yerushalmy, M., (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. (Eds.). (2003). *A*

Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics (pp. 123-135). Reston, VA: NCTM.

Chazan, D. & Yerushalmy, M., (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. Em *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp 123-135). Reston, VA: NCTM.

Devlin, K. (1998). *Life by the numbers*. NY:John Wiley &Sons, Inc.

Expresso (2013). *INDISCIPLINA CRESCE NO ENSINO SUPERIOR*. Acedido em http://www.crup.pt/pt/imprensa-e-comunicacao/recortes-de-imprensa/6640-indisciplina-cresce-no-ensino-superior, a 24 de dezembro de 2015.

Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristóvão E. (2005). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In Seminário Luso-Brasileiro: *Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores*. Acedido em ftp://ftp.cefetes.br/cursos/Matematica/Alex/06-Um%20estudo%20das%20potencialidades%20pedagogicas.pdf a 26 de Dezembro de 2015.

Fiorentini, D., Miorim, A. & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar… a educação algébrica elementar. *Pro-posições, 4(1),* 78-90.

Heath, T. (1910). DIOPHANTUS OF ALEXANDRIA – *A STUDY IN THE HISTORY OF GREEK ALGEBRA.* Acedido em https://archive.org/stream/diophantusofalex010687mbp#page/n15/mode/2up a 26 de Dezembro de 2015.

Herscovics, N. and Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73*(8): 572-580.

Herscovics, N. and Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation.*Mathematics Teacher, 73*(8): 572-580.

Leitão, A. & Cangueiro, L. (s. d.). Princípios e Normas do NCTM – um percurso pela álgebra. Acedido em www.apm.pt/files/_Conf_Cangueiro_Leitao_487e4d92df2e1.pdf, a 24 de Dezembro, 2015.

Lino, M. C. (2009). *A UTILIZAÇÃO DAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA*. Acedido em http://www.educacion.udc.es/grupos/gipdae/documentos/congreso/xcongreso/pdfs/t12/t12c408.pdf a 24 de Dezembro de 2015.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N. & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo, B. Alfonso, M. Machín & L. B. Nieto (Eds*.), Investigación en educación matemática XII* (505-516). Badajoz: SEIEM.

Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2013). Comunicação Matemáticas práticas dos professores. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-164). Lisboa: IEUL.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME: DGIDC.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: MEC-DGE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. (Trad.) Lisboa: APM. (obra original publicada em 2000).

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar. Lisboa*: APM

Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2012). Cubos com autocolantes (1..º ciclo) – caso multimédia. In *Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática*. Acedido em http://p3m.ie.ul.pt/caso1-cubos-com-autocolantes-1-ciclo a 24 de Dezembro de 2015.

Pinto, J.,& Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Polya, G. (1967). *O ensino por meio de problemas*. Acedido em http://ucbweb.castelobranco.br/webcaf/arquivos/13381/6450/TRProblemas_02.pdf a 24 de Dezembro de 2015.

Ponte, J. P. (2004*). Pesquisar para compreender e transformar a ossa própria prática*. Acedido em http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3983 a 24 de Dezembro de 2015.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Bunheira, L., Oliveira, H., & Varandas, J. (1998). Investigating mathematical investigations. In P. Abrantes, J. Porfirio, & M. Baía (Eds.), *Les interactions dans la classe de mathématiques: Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.

Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, P.(2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J.P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J.P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Roldão, M. (2009). *Estratégias de Ensino*. Vila Nova de Gaia. Fundação Manuel Leão

Schoenfeld, A. Por que toda esta agitação acerca da Resolução de Problemas? In: Abrantes, P.; Leal, L. C.; Ponte, J. P. (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61 – 72). 1996. Lisboa: APM e Projecto MPT (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Stake, R. E. (2007). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In *The ideas of algebra* (pp. 8-19). A. F. Coxford and A. P. Schulte (Eds.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Anexo I – Tarefas

AlfaZoo

(Aula 1)

EbspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 matemática

ID:______________________________

AlfaZoo

Depois de povoarem o eco-lago com as carpas, a Alice e o Marco foram viajar com os pais e visitaram jardins zoológicos em diferentes países tendo anotado, num caderno, as quantidades dos seus animais preferidos que viram em cada Zoo.

1. Observem os apontamentos da Alice e do Marco e indiquem, por ordem crescente, o número de animais de cada espécie que os amigos registaram nos seus apontamentos.

Zoo I
8 tigres, 2 elefantes e 1 urso.
Zoo II
6 golfinhos, 3 elefantes e 6 tigres.
Zoo III
5 zebras, 3 ursos e 4 golfinhos.
Zoo IV
6 zebras, 6 tigres, e um casal de elefantes.

2. Como a Alice é muito organizada resolveu reescrever os apontamentos de forma a descobrir quantos animais de cada espécie contabilizaram. Expliquem o significado do registo efetuado.

8T + 2E + 1U + 6G + 3E + 6T + 5Z + 3U + 4G + 6Z + 6T + 2E =

= 1U + 3U + 2E + 3E + 2E + 6G + 4G + 8T + 6T + 6T + 5Z + 6Z =

= 4U + 7E + 10G + 20T + 11Z

3. Quais das expressões seguintes são falsas? Justifiquem.

a) 3u + 2u = 5u

b) 3u – 2u = 1u

c) 3u – u = 3

d) 2g + 3u – 1g = g + 3u

e) g + 3u = 4gu

f) 3(2g + 3u) = 6g + 3u

g) -3(2g – 3u) = - 6g – 9u

h) –(2g - 3u) + u = -2g + 4u

Manual: Volume III
Página 7

- Termos da expressão
- Parte literal
- Coeficiente numérico
- Termos semelhantes

TPC I

ID :________________________________

1. Simplifica as seguintes expressões.

a) $x + 2x + 1 + 2 =$

b) $x - 2x + 1 - 2 =$

c) $x + 2x + y + 2y =$

d) 1+ $x + y + 2x - 2y + 2 =$

e) $x^2 + 2x^2 =$

f) $1 + x^2 + 2x^2 - y^2 + 2y^2 + 2 =$

g) $3(x + 2y) - 6y =$

h) $xy + x^2 + 2x^2$

Férias de Carnaval

(Aula 2)

EbspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 **matemática** FECB

ID:______________________________

Férias de Carnaval

1. Durante as férias do Carnaval, a Alice e o Marco organizaram uma festa de máscaras, convidaram 19 amigos, e registaram informações importantes. Parte dos registos foram entretanto danificados com corretor. Ajudem os amigos a descobrir os valores em falta, para que estes possam começar a planear uma nova festa para as férias da Páscoa.

A- Nº Amigos convidados (da Alice e do Marco)

$12 + \dots = 19$

B- Comparação entre o nº de rapazes e o nº de raparigas convidados

$8 = 19 - \dots$

C- Custo em euros dos bolos, das gomas, e dos sumos

$20 + \dots + 6 = 31$

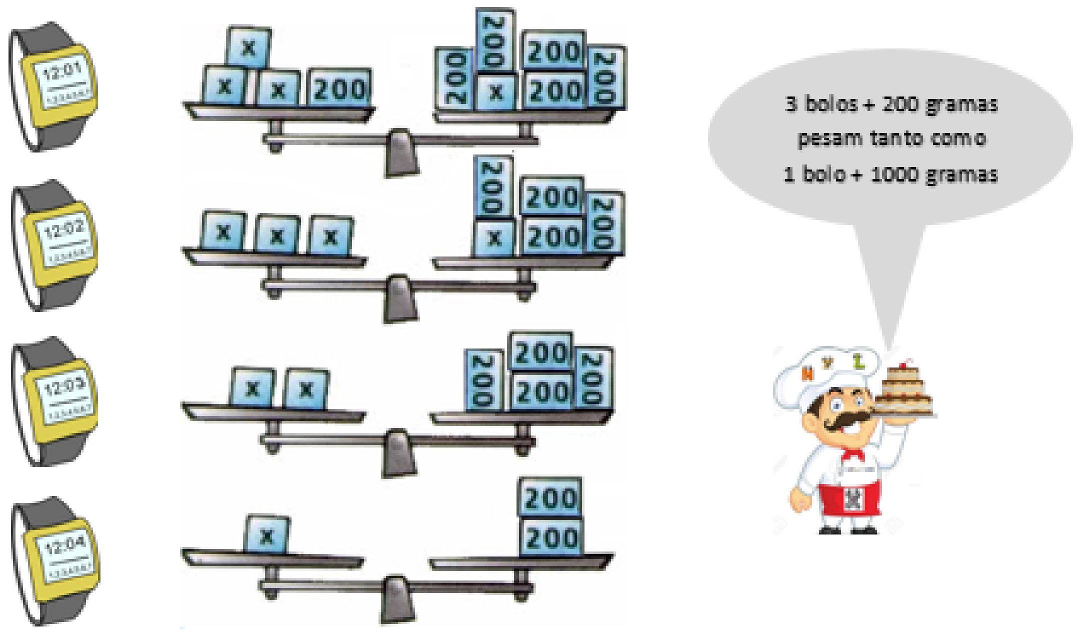
D- Litros de sumo de laranja e ananás comprados para a festa

$\dots + 3 = 8$

2. A cada uma das expressões seguintes corresponde uma das informações dos dois amigos. Tal como é exemplificado, efetuem as correspondências corretas e indiquem qual o significado da incógnita

$20 + G + 6 = 31$	○	Ⓐ	Incógnita **M** representa **o número de amigos convidados pelo Marco**
$12 + M = 19$	●	Ⓑ	Incógnita __ representa ______________________________
$8 = 19 - R$	○	Ⓒ	Incógnita __ representa ______________________________
$L + 3 = 8$	○	Ⓓ	Incógnita __ representa ______________________________

3. Pensando já na festa da Páscoa, a Alice foi pesquisar na internet receitas de bolos. Encontrou um bolo de chocolate, e tentou perceber quanto pesava o bolo a partir de um esquema criado por um mestre chocolateiro que, à medida que o tempo passava, ia alterando o conteúdo dos pratos de uma balança. Depois de observarem o esquema e a informação do mestre chocolateiro, justifiquem se são verdadeiras ou falsas as informações que se seguem.



a) x representa o número de bolos.

b) x representa o peso de cada bolo.

c) A situação da primeira balança pode ser traduzida pela expressão $x + x + 200 = x + 1000$.

d) Nem todas as balanças estão em equilíbrio.

4. Respondam às questões seguintes sobre as ações do mestre chocolateiro. Justifiquem.

a) O que fez ele aos pratos da balança entre as 12:01 e as 12:02?

b) Se às 12:02 ele retirar o peso de um bolo a cada prato, como fica a balança?

c) Para que a situação da balança às 12:03 seja equivalente à situação das 12:04 o que deve ele fazer?

d) Quanto pesa cada bolo?

e) Se às 12:04 multiplicar o conteúdo dos pratos por 2, obtém-se uma situação equivalente a alguma das anteriores?

Aluno X

(Aula 3)

ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 matemática

ID :______________________________

Aluno X

O Aluno X esteve há pouco no vosso computador a trabalhar com equações algébricas, abre o ficheiro Excel *Solver* e respondam às seguintes questões:

1. Cliquem na folha de cálculo 1 e completem as descrições daquilo que foi feito pelo Aluno X.
2. Qual, ou quais, das seguintes situações podem corresponder à equação da questão 1? Justifiquem.
   a) A Alice comprou 10 gomas e o Marco ofereceu-lhe mais 5 gomas, no total a Alice ficou com 55 gomas.

   b) A Alice comprou 10 pacotes de gomas e o Marco ofereceu-lhe mais 5 gomas, no total a Alice ficou com 55 gomas.

   c) A Alice comprou 10 pacotes de gomas e o Marco ofereceu-lhe mais 10 pacotes de gomas, no total a Alice ficou com 55 gomas.

3. Tendo em conta a situação que escolheram, o que representa nesse caso o valor de x=5?

4. Nas folhas de cálculo 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 o Aluno X descreveu o que fazer para resolver quatro novas equações, sigam as instruções do Aluno X e completem as células a vermelho.
5. Façam como o Aluno X, e resolvam no Excel as equações das folhas de cálculo 5.1 e 5.2 e indiquem como procederam na coluna "o que fizeram?"

Guloseimas para a Páscoa

(Aula 4)

EbspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 **matemática**

ID :______________________________

Guloseimas para a Páscoa

1. A Alice e o Marco continuam a preparar a festa da Páscoa e, descobriram uma loja com gomas fantásticas. Compraram 6 embalagens de gomas e, compraram mais 18 gomas de coca-cola. No total compraram 60 gomas.

   a) Assinalem qual das seguintes equações traduz a situação descrita?

   $\underbrace{6g} + \underbrace{18g} = \underbrace{60}$
   Termos

   $\underbrace{6} + \underbrace{18g} = \underbrace{60}$
   Termos

   $\underbrace{6g} + \underbrace{18} = \underbrace{60}$
   Termos

   b) Expliquem o que representa cada um dos três termos da equação que escolheram.

   c) O que significa, nesta situação, a incógnita g?

2. Os amigos também compraram pacotes de lacasitos, e levaram para casa igual número de pacotes. A Alice comeu uma certa quantidade de pacotes e sobraram-lhe 7 pacotes. O Marco comeu o dobro dos pacotes que a Alice comera e sobraram-lhe 5 pacotes.
   A equação seguinte traduz a situação descrita.
   $\mathbf{7 + p = 5 + 2p}$

   a) O que significa, neste caso, a incógnita p?

   b) Alguma das equações seguintes é equivalente à equação dos lacasitos? Expliquem o vosso raciocínio.
   $12 + p = 10 + 2p$
   $7p = 5 + 2p$
   $7 + 5 = 2p + p$
   $7 + p - 5 = 5 + 2p - 5$

3. Resolvam as equações das questões anteriores.

   a) $6g + 18 = 60$

   b) $7 + p = 5 + 2p$

Equações I

(Aula 5)

ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 matemática FEQB

ID :________________________________

Equações I

1. Nas folhas de cálculo 1, 2 e 3, constam três equações. Respondam às questões seguintes.
   a) A qual dos enunciados corresponde cada uma das três equações? Escrevam nos espaços a equação correspondente.

   i) Dez gomas mais três pacotes de gomas são tantas gomas como um pacote de gomas mais trinta gomas. ____

   ii) A Alice deve uma certa quantia de dinheiro e o Marco deve o triplo dessa quantia. A dívida do Marco mais 14 € é igual à divida da Alice mais 10 € ____________________________________

   iii) A Alice e o Marco têm dinheiro guardado nos bolsos e na carteira. No total os amigos têm o mesmo dinheiro e sabemos que nos bolsos o Marco tem o triplo do que tem a Alice. Já na carteira a Alice tem 14 € e o Marco têm 10 €. ____

   b) Qual a solução de cada uma das equações?
      i)

      ii)

      iii)

   c) O que significa cada uma das soluções encontradas?
      i)

      ii)

      iii)

2. Nas folhas de cálculo 4 e 5 estão duas equações, resolvam-nas e indiquem as soluções respetivas.
   a)

   b)

3. Na folha de cálculo 6 encontram cinco equações, alguma delas têm solução 2? Justifiquem a vossa escolha.

Mestres e guloseimas

(Aula 6 e Aula 7)

EbspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 **matemática**

ID:____________________________

Mestres e guloseimas

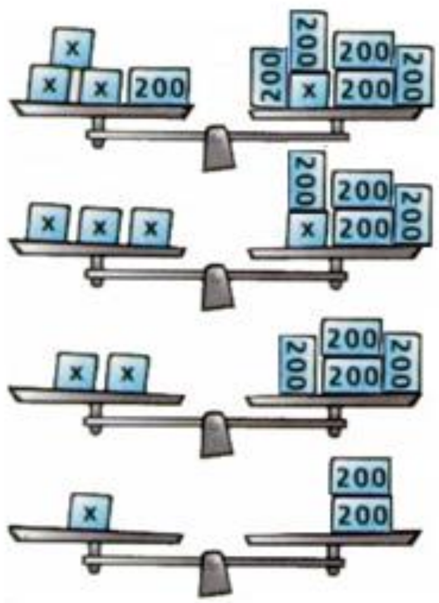
1. Observem a figura e justifiquem se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.

1ª Balança

2ª Balança

3ª Balança

4ª Balança



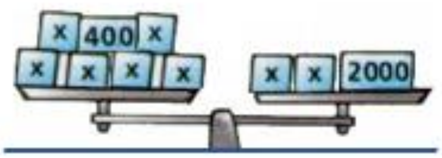
a) X representa o número de bolos em cada prato da balança.

b) A situação da 1ª balança pode ser traduzida pela expressão x + x + x + 200 = 1000.

c) Se multiplicarem por dois o conteúdo de cada prato da última balança obtêm uma situação equivalente à da 3ª balança.

d) Se multiplicarem por três o conteúdo de cada prato da última balança obtêm a situação da 2ª balança.

e) A situação da balança seguinte é equivalente à situação de qualquer uma das balanças anteriores.



2. O Marco tem três caixas de bombons, a Alice tem 9 bombons e, no total, os dois amigos têm 30 bombons.

a) Qual das seguintes equações traduz a situação descrita? Expliquem a vossa escolha.

$3 + 9b = 30$ $3b + 9 = 30$ $3b + 9b = 30$

b) Tendo em conta a situação descrita, o que significa a incógnita b?

c) Determinem a solução da equação que escolheram, indicando todos os cálculos efetuados. O que representa o valor que encontraram?

3. A Alice tem três pacotes de gomas iguais e afirma que as gomas existentes nesses pacotes mais 14 gomas são tantas gomas como as 10 gomas que o Marco tem, mais o triplo das gomas existentes num pacote.

a) A equação $3g + 14 = 10 + 3g$ traduz a afirmação da Alice. Resolvam-na e justifiquem se a Alice tem razão.

b) Algumas das equações seguintes são equivalentes à equação da alínea a)? Se sim qual ou quais? Justifiquem a vossa escolha.

$3g + 3g = 10 + 14$

$17g = 13g$

4. Qual a solução das equações seguintes? Indiquem todos os cálculos que efetuarem.

a) $3x + 1 = 7$

b) $3x + 7 = 7$

c) $3x + 7 = 7 + 3x$

d) $3x + 7 = 3x$

5. Resolvam e classifiquem as equações seguintes. Indiquem os conjuntos-solução respetivos.

a) $2(3x + 1) = 6x + 2$ **b)** $-2(3x + 1) = 6x + 2$ **c)** $2(3x + 1) = 6x - 2$

TPC II

2. O Marco tem três caixas de bombons, a Alice tem 9 bombons e, no total, os dois amigos têm 30 bombons.
   a) Qual das seguintes equações traduz a situação descrita? Expliquem a vossa escolha.

   $3 + 9b = 30$ $\qquad$ $3b + 9 = 30$ $\qquad$ $3b + 9b = 30$

   b) Tendo em conta a situação descrita, o que significa a incógnita b?

   c) Determinem a solução da equação que escolheram, indicando todos os cálculos efetuados. O que representa o valor que encontraram?

3. A Alice tem três pacotes de gomas iguais e afirma que as gomas existentes nesses pacotes mais 14 gomas são tantas gomas como as 10 gomas que o Marco tem, mais o triplo das gomas existentes num pacote.
   a) A equação $3g + 14 = 10 + 3g$ traduz a afirmação da Alice. Resolvam-na e justifiquem se a Alice tem razão.

   b) Algumas das equações seguintes são equivalentes à equação da alínea a)? Se sim qual ou quais? Justifiquem a vossa escolha.

   $3g + 3g = 10 + 14$

   $17g = 13g$

4. Qual a solução das equações seguintes? Indiquem todos os cálculos que efetuarem.
   a) $3x + 1 = 7$
   b) $3x + 7 = 7$
   c) $3x + 7 = 7 + 3x$
   d) $3x + 7 = 3x$

5. Resolvam e classifiquem as equações seguintes. Indiquem os conjuntos-solução respetivos.

   a) $2(3x + 1) = 6x + 2$ $\qquad$ **b)** $-2(3x + 1) = 6x + 2$ $\qquad$ **c)** $2(3x + 1) = 6x - 2$

Equações II

(Aula 8)

ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 matemática

ID :________________________________

Equações II

1. Nas folhas de cálculo 1, 2, 3 e 4 constam quatro equações, resolvam-nas e classifiquem-nas.
   a) **9x - 12 = 12 + 3x** é uma equação____.
   b) **9x - 12 = -12 + 9x** é uma equação____.
   c) **3x - 4 = 14 - 3x** é uma equação____.
   d) **3x - 4 = 14 + 3x** é uma equação____.

2. Suponham que x representa o número de bolos que o Mestre Chocolateiro faz por dia.
   a) Descrevam uma situação que possa ser traduzida pela equação da folha de cálculo 1.
      9x - 12 = 12 + 3x

3. Na folha de cálculo 5 encontram cinco equações, alguma delas têm solução 2? Justifiquem a vossa escolha.

ID :________________________________

É PERMITIDA A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORA.

Mini -Teste 6

1. Façam corresponder as equações seguintes à classificação correta.
(4/20)

a) $2x = 2x$ ▪		▪ Equação possível e determinada.
b) $2x = 2x + 6$ ▪		▪ Equação possível e indeterminada.
c) $2x = 6$ ▪		▪ Equação impossível.

2. Justifiquem se cada uma das equações seguintes é ou não equivalente à equação $2x + 4 = 10 + 14x$.
(4/20)

a) $2x + 14x = 10 + 4$

b) $x + 2 = 5 + 7x$

3. Resolvam a equação seguinte e indiquem a sua solução.
(6/20)

a) $3(2x + 1) + 3 = 2x + 2$

4. Durante todos os dia do mês de fevereiro, a Alice colocou no seu mealheiro uma certa quantia de dinheiro e o Marco colocou no dele o triplo dessa quantia. Em Março os amigos abriram os mealheiros e verificaram que o Marco tinha mais 8 € do que a Alice.
(6/20)

a) Alguma das equações seguintes pode traduzir a situação descrita? Se sim assinalem qual ou quais e expliquem porquê.

$3x + x = 8$

$3x - x = 8$

$3x - 8 = x$

ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 matemática

ID :________________________________

Equações III

1. Alguma das equações seguintes é impossível? Qual ou quais? Justifiquem.

   a) $9x = 3$
   b) $9x = 9x$
   c) $9x = 9x + 3$

2. Justifiquem se cada uma das equações seguintes é ou não equivalente à equação $2x + 4 = 10 + 2x$.

   a) $6x = 12x$

   b) $x + 2 = 5 + x$

   c) $2x + 2x = 10 + 4$

3. Resolvam a equação seguinte e indiquem a solução respetiva.

   a) $3(2x + 1) + 3 = 6x + 6$

4. Durante todos os dias do mês de Fevereiro, a Alice colocou no seu mealheiro uma certa quantia de dinheiro e o Marco colocou no dele o dobro dessa quantia. Em Março abriram os mealheiros e verificaram que o Marco tinha mais 10 € do que a Alice.

   a) Escrevam uma equação que traduza o enunciado anterior.

   b) O que representa a incógnita?

Anexo II – Questionário

EbspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 matemática

ID:_______________________________

Questionário

1. Assinala com um "+" os aspetos em que o *Solver* mais te ajudou. E Assinala com um "-" aqueles em que o *Solver* ajudou-te menos.
   a) Compreender o que é a incógnita.
   b) Classificar equações.
   c) Compreender o que são equações equivalentes.
   d) Resolver equações.
   e) Verificar a solução das equações.
   f) Compreender o significado da solução.
   g) Despertar o interesse pela aula.
   h) Outro, qual? ____.

2. Descreve um pouco como foi a tua experiência de aprender as equações com a utilização do *Solver*.

3. Em relação à utilização do *Solver* assinala com um X a afirmação que melhor corresponde à tua opinião.
   a) O *Solver* não me ajudou nada na minha aprendizagem de equações. __
   b) O *Solver* ajudou pouco na minha aprendizagem de equações. __
   c) O *Solver* deu-me uma ajuda razoável na minha aprendizagem de equações. __
   d) O *Solver* ajudou-me muito na minha aprendizagem de equações. __

Anexo III – Planos de Aula

No planeamento das aulas da minha intervenção procurei privilegiar a aprendizagem ativa dos alunos e privilegiar abordagens de ensino de carácter intuitivo. As aulas foram segmentadas em diferentes momentos para fomentar dinâmicas diversificadas e motivantes para os alunos. Assim, e atendendo ao descrito nas metas curriculares, foi propósito da minha intervenção contribuir também para o desenvolvimento de capacidades transversais dos alunos, como o raciocínio matemático, a comunicação, a autonomia, o espírito crítico, o lidar com situações complexas, o conjeturar, o argumentar, o generalizar e o estabelecer de conexões.

Em todas as aulas os alunos trabalharam aos pares e foi incentivada a exploração, a discussão e a negociação de significados. Os materiais e equipamentos utilizados pelos alunos foram as tarefas que constam em anexo, o caderno, o manual escolar, o material de escrita, a calculadora e o computador. O professor utilizou os quadros de escrita, marcadores, projetor e o computador.

No planeamento das aulas comtemplei um período de cerca de 10 minutos para entrada dos alunos, isto porque todas as aulas ocorreram no primeiro tempo da manhã e, nesta altura do dia, os atrasos dos alunos são habituais.

Relativamente à metodologia de trabalho a seguir nas aulas esta previu papéis distintos para o aluno e para o professor (ver tabela 6).

Tabela 7 – Papeis: aluno, professor.

Segmentos	Papel do aluno	Papel do professor
Introdução	Preparar os materiais de trabalho; Prestar atenção à introdução da tarefa.	Captar a atenção dos alunos; Garantir um início de aula célere.
Trabalho autónomo	Ler atentamente os enunciados e as questões; Explorar a tarefa em colaboração com o par; Mobilizar conhecimentos e estabelecer conexões; Relacionar as questões da tarefa; Analisar criticamente as suas produções e as do colega.	Monitorizar o trabalho dos pares e regular comportamentos; Incentivar a autonomia dos alunos; Selecionar produções em função da sua correção e da possibilidade de exploração do erro;
Discussão coletiva / síntese	Expor e justificar raciocínios; Escutar e debater os raciocínios dos colegas.	Escutar os alunos; Evitar a validação constante; Promover o debate de ideias; Gerir participações e regular comportamentos; Garantir o rigor da linguagem; Promover conexões; Eliminar conceções erróneas. Sintetizar ideias fundamentais.

Aula 1 – 18 de fevereiro de 2016 – 45 minutos

Conteúdos: Expressões algébricas.

Objetivos:

- Identificar monómios semelhantes;
- Simplificar expressões algébricas.

Pré-requisitos:

- Operações;
- Ordenação crescente.

Tarefa: AlfaZoo.

Desenvolvimento da aula

Entrada dos alunos e introdução da tarefa	10 Minutos

Depois de os alunos se sentarem, o professor dá os bons dias à turma e relembrando os personagens Alice e Marco, faz uma pequena introdução à tarefa lendo o seu enunciado. Os alunos são então convidados a iniciarem a resolução das duas questões da tarefa nos enunciados respetivos, os quais foram previamente colocados nas suas secretárias. No final da aula, será distribuído aos alunos o TPC I indicando o professor que o mesmo deverá ser entregue até dia 23 de fevereiro.

Trabalho autónomo	20 Minutos

Na questão 1 da tarefa, não é expectável que os alunos tenham dificuldades significativas em indicar quantos animais, de cada espécie, os personagens da tarefa registaram nos seus apontamentos. A ordenação crescente do número de animais poderá passar despercebida a alguns dos pares, devendo o professor alertar os alunos que verifiquem o que é solicitado na enunciado da questão.

Na questão 2 da tarefa, é previsível que os alunos percebam que a Alice utilizou abreviaturas para designar os nomes dos animais, porém a explicação deste facto deverá constituir uma dificuldade para os alunos. É igualmente expectável que os alunos detetem que a Alice ordenou os monómios da expressão segundo a sua semelhança e que, de seguida, somou os monómios semelhantes. Previsivelmente, os alunos apesar de compreenderem o que foi feito pela Alice, tenderam a sentir dificuldade em exprimir por escrito o seu entendimento dos registos desta personagem. Este será um momento importante para o professor analisar e selecionar resoluções de alunos que, pela sua clareza, possam ajudar os colegas a exprimir ideias corretamente.

Na questão 3, são expectáveis bastantes dificuldades dos alunos. É especialmente esperado que, os alunos considerem como verdadeiras as expressões onde se adicionam termos não semelhantes e as expressões onde a propriedade distributiva não foi corretamente aplicada. Estas dificuldades serão registadas pelo professor para serem lançadas na discussão coletiva. Em termos de apoio aos alunos, o professor deverá colocar questões de redireccionamento que invoquem a impossibilidade de somar animais que não são da mesma espécie, ou que invoquem o trabalho efetuado no 1.º período relativo ao uso de parêntesis nas expressões.

Discussão e síntese	15 Minutos

Para discutir a questão 1, e dado o caráter acessível desta questão, o professor deverá solicitar a um aluno que habitualmente participe pouco que vá ao quadro, isto para o motivar e aumentar a sua autoconfiança. Este aluno deverá escrever no quadro a sua resolução e, após este momento, o professor, que se encontra afastado do quadro, deverá selecionar alunos para discutir o que foi escrito. No final desta discussão a resolução correta da questão deverá ficar escrita no quadro.

Para discutir a questão 2, o professor pede ao aluno pré-selecionado no segmento de trabalho autónomo, que vá ao quadro escrever a resolução que realizou. Para apoiar este momento, o professor projeta no quadro a questão para que o aluno escreva as suas interpretações abaixo de cada linha de registo da personagem, facilitando-se assim a organização do quadro e a discussão. Na discussão desta questão, partindo da conceção de animais da mesma espécie, deverão ser introduzidos os designativos “termos semelhantes” e “termos não semelhantes”.

Na discussão da questão 3, será o professor a tomar o lugar junto ao quadro e, auxiliado pela projeção desta questão, seleciona alunos para classificar o valor lógico de cada expressão. Relativamente à adição de termos não semelhantes, o professor, num momento de boa disposição, deverá questionar os alunos se o adicionar de um golfinho com um urso origina um “gurso”. Durante esta discussão o professor deverá, com pertinência, ir introduzindo os designativos “termos de expressão”, “parte literal” e “coeficiente numérico”, remetendo para a página 7 do manual a consulta destes designativos.

Nesta aula e nas seguintes, a escolha dos alunos a participar em cada discussão será sempre feita de forma criteriosa, em função do grau de correção das suas produções, da possibilidade de exploração de erro pela turma, da vontade manifestada pelo aluno em participar, ou porque poderão estar a envolver-se um pouco menos na resolução da tarefa.

Aula 2 – 19 de fevereiro de 2016 – 90 minutos.

Conteúdos: Equações do 1.º grau.

Objetivos:

- Resolver equações simples;
- Estabelecer a noção de incógnita e seu significado no contexto da tarefa;
- Estabelecer a noção de equação;
- Compreender os princípios de equivalência;
- Traduzir problemas algebricamente.

Pré-requisitos:

- Operações.

Tarefa: Férias de Carnaval.

Desenvolvimento da aula

Entrada dos alunos e introdução da tarefa	10 Minutos

Com habitualmente, após se sentarem, os alunos serão cumprimentados e ser-lhes-á indicado que deverão resolver as duas primeiras questões da tarefa em 15 minutos e que, para terceira e quarta questões irão dispor de 15 e 20 minutos respetivamente.

Trabalho autónomo – Questões 1 e 2	15 Minutos

Na questão 1, não são esperadas grandes dificuldades. Os alunos deverão descobrir quais os valores que dão sentido às expressões e, desta forma, preparar o "terreno" para a aprendizagem das equações do 1.º grau.

A questão 2 envolve o termo designativo "incógnita" o qual será uma novidade para os alunos e, previsivelmente, esta será uma dificuldade a ter em conta, nomeadamente porque os alunos poderão não dispensar a atenção necessária à apresentação das incógnitas que é feita no enunciado da tarefa. Na associação das equações às incógnitas, os alunos deverão identificar corretamente o significado de cada incógnita. A designação correta de cada incógnita no contexto do problema deverá ser uma dificuldade para os alunos, nomeadamente porque estes deverão entender erradamente as incógnitas como abreviaturas. É expectável que por exemplo ‘G’ seja designado como gomas em vez de custo de gomas. Para auxiliar os alunos na superação destas dificuldades, o professor deverá focar a atenção destes no significado de incógnitas que está descrito na tarefa, ou seja, que as incógnitas representam valores a descobrir.

Trabalho autónomo – Questão 3	15 Minutos

Na resolução da questão 3 é previsível que parte significativa dos alunos identifique erradamente o significado da incógnita no contexto do problema, ou seja, é expectável que para muitos alunos ‘x’ represente o número de bolos e não o peso de cada bolo. É nesta fase que o professor deverá questionar os alunos acerca do que é desconhecido, se o número de bolos ou o seu peso. De seguida o professor pergunta o que é uma incógnita e aconselha os alunos a verificarem a apresentação de incógnita que é feita no enunciado.

Também é previsível que os alunos tenham dificuldade em verificar corretamente se as balanças estão em equilíbrio, muitos poderão guiar-se apenas pela sugestão feita pela figura. O professor deverá alertar os alunos para o que é dito pelo mestre chocolateiro, ou seja, que “3 bolos + 200 gramas pesam tanto como 1 bolo + 1000 gramas” e solicitar-lhes que analisem o que aconteceu aos conteúdos da balança, verificando se o equilíbrio inicial foi ou não preservado.

Trabalho autónomo – Questão 4	20 Minutos

Na questão 4 da tarefa, os alunos deverão identificar corretamente as variações que ocorrem nos conteúdos dos pratos da balança e como se relacionam, entre si, os diferentes conteúdos que a balança vai tendo ao longo do tempo. Apesar do caráter intuitivo da tarefa, é expectável que os alunos tenham algumas dificuldades em perceber o que vai ocorrendo aos conteúdos da balança. O professor deverá solicitar aos alunos que leiam atentamente o enunciado da tarefa e a frase do mestre chocolateiro, observando igualmente, e atentamente, as figuras da tarefa antes de responderem às questões.

Discussão e síntese – Questões 1 e 2	10 Minutos

Para a discussão das questões 1 e 2, o professor deverá projetar as mesmas no quadro e escolher 4 alunos para irem completar os espaços da questão 1 com valores que deem sentido às igualdades. A primeira questão é acessível e, por isso, deve ser aproveitada pelo professor para motivar alunos que habitualmente têm mais dificuldades ou envolvem-se menos, escolhendo-os para ir ao quadro.

Na discussão da questão 2 é o professor quem está no quadro e, aproveitando a projeção da questão, escolhe alunos que o ajudem a completar os espaços da questão e a fazer as associações corretas. Nesta fase o professor deverá sublinhar que as incógnitas não são abreviaturas, mas que representam quantidades ou valores que se pretende descobrir.

Discussão e síntese – Questões 3 e 4	20 Minutos

Na discussão da questão 3, o professor poderá começar por perguntar aos alunos o que se desconhece, isto para acentuar qual o significado correto de incógnita. Seguidamente, e recorrendo à projeção da tarefa e à analogia das balanças, deverá focar a atenção dos alunos no conceito de equilíbrio. A discussão deverá prosseguir com o professor a selecionar alunos para apresentarem os seus argumentos e a dar oportunidade a outros que queiram contra-argumentar.

A discussão da questão 4 será semelhante à da questão 3 e, sempre que necessário, o professor deverá desenhar no quadro esquemas de conteúdos de balanças, os quais devem ajudar os alunos a chegarem às respostas corretas.

Na síntese destas questões, o professor deverá apresentar aos alunos o designativo de “equação” e identificá-lo como uma igualdade entre dois membros onde consta uma incógnita, isto recorrendo à metáfora das balanças onde existe um equilíbrio entre o conteúdo dos seus dois pratos. O professor deverá também procurar garantir que os alunos ficam com noções, ainda que informais, do que são os princípios de equivalência e equações equivalentes, devendo estabelecer, desta vez, analogias com as ações do mestre chocolateiro que mantiveram a balança em equilíbrio

Aula 3 – 23 de fevereiro de 2016 – 90 minutos.

Conteúdos: Expressões algébricas.

Objetivos:

- Resolver equações do 1.º grau;
- Aplicar os princípios de equivalência;
- Estabelecer a noção de solução da equação;
- Verificar a solução de equações;
- Determinar o significado de incógnita no contexto da tarefa;
- Traduzir problemas algebricamente.

Pré-requisitos:

- Operações;
- Noção de incógnita;
- Noção de equação, de membro da equação e de equação equivalente.

Tarefa: Aluno X.

Desenvolvimento da aula

Entrada dos alunos e introdução da tarefa	30 Minutos

Após a entrada dos alunos, e efetuados os preparativos necessários para que a aula se inicie, o professor projeta no quadro a folha de cálculo 0.1 do ***Solver*** 1 e inicia um tutorial relativo à resolução da equação '3x-5 = 16'. Neste tutorial o professor pergunta o que deve fazer aos membros da equação para conseguir isolar a incógnita. Este questionamento deverá invocar a analogia com os conteúdos da balança do mestre chocolateiro que foi abordado na aula anterior. O professor deverá explorar com os alunos diversas possibilidades que estes sugiram, nomeadamente a previsível subtração de '3' a '3x', isto para que os alunos comecem a ganhar, desde cedo, a noção de que tipo de termos podemos ou não adicionar/subtrair. A resolução final desta equação deverá ser registada por todos os pares de alunos nos seus computadores, igualmente, deverá ser discutida com os alunos a descrição correta de cada operação efetuada, sendo a mesma registada, por todos, na célula respetiva da folha de cálculo.

Seguidamente, é iniciada em grupo a resolução de uma segunda equação que consta na folha de cálculo 0.2 do *Solver* 1, isto nos mesmos moldes da resolução anterior mas, previsivelmente, com uma maior autonomia por parte dos alunos.

Este trabalho em grupo deverá ser igualmente aproveitado pelo professor para confrontar os alunos com o conceito de solução da equação e para explorar, com os alunos, a verificação das soluções encontradas.

A introdução da tarefa deve terminar com a solicitação da resolução das questões 1, 2 e 3 no tempo máximo de 20 minutos, findo esse tempo os alunos deverão explorar as questões 4 e 5, também durante 20 minutos, seguindo-se a discussão em grupo das produções realizadas.

Trabalho autónomo - Questões 1, 2 e 3.	20 Minutos

Na questão 1, os alunos deverão verificar e descrever que o Aluno X dividiu cada membro da equação por 10, obtendo dessa forma uma equação equivalente mais simples. Não estão previstas dificuldades de maior para a resolução desta questão, a mesma destina-se a familiarizar os alunos com os princípios de equivalência.

Na questão 2, pretende-se que os alunos identifiquem qual dos três enunciados corresponde à equação da questão anterior. Os alunos deverão sentir algumas dificuldades para selecionar a opção correta, nomeadamente porque ainda lhes será difícil entender a incógnita como um valor que se desconhece, isto em lugar de a considerarem como uma abreviatura. Nesta fase as ações do professor junto dos alunos deverão visar o redireccionamento de raciocínios, especialmente no que ao significado de incógnita diz respeito. O professor deverá incentivar os alunos a lerem o enunciado, a observarem a equação ‘10x+5 = 55’, a identificarem o que se pretende descobrir com a equação, o que é conhecido e qual dos enunciados pode ser traduzido por essa equação.

Na questão 3, os alunos devem responder que o valor de ‘x’ que foi encontrado significa que cada pacote de gomas tem 5 gomas. É previsível que os alunos sintam dificuldade em responder a esta questão, será a primeira vez que estarão a explorar a solução de equações. Aos alunos que não tenham respondido corretamente à questão 2, o professor deverá redirecionar os seus raciocínios para obterem, antes de mais, a resposta correta a essa questão. Aos alunos que tenham selecionado corretamente o enunciado que é traduzido pela equação, o professor deve sugerir que clarifiquem o que representa a incógnita ‘x’ no contexto do problema e que, seguidamente, identifiquem o que significará então ‘x=5’.

Trabalho autónomo – Questões 4 e 5 | 20 Minutos

Na questão 4, seguindo as instruções do Aluno X, os alunos deverão preencher as células a vermelho com o valor correspondente à descrição existente. É previsível que os alunos não sintam dificuldades relevantes nesta questão, a qual tem novamente presente a intenção de familiarizar os alunos com os princípios de equivalência.

Na resolução da questão 5, os alunos devem resolver duas equações, efetuando para tal as inserções no *Solver* que acharem ser as mais adequadas. Previsivelmente, os alunos irão sentir bastante dificuldade na resolução das equações. Por ser a primeira vez que o fazem autonomamente, é previsível que os alunos tentem subtrair os coeficientes de ‘x’ às equações para encontrar o valor de ‘x’. É igualmente expectável que os alunos sintam redobradas dificuldades na resolução da segunda equação,’10x+11 = 11x+10’, a qual contém a incógnita em ambos os membros. Ao interagir com os alunos, o professor deve sugerir-lhes que imaginem balanças e que comecem por observar o que devem “retirar” ao conteúdo do primeiro prato da balança para conseguirem isolar a incógnita. Quando forem detetados bloqueios por os alunos não conseguirem dividir monómios que tenham incógnita, o professor pode questionar o que fazer se soubermos o peso de 3 animais iguais e quisermos saber quanto pesa um só.

Discussão e síntese – Questões 1, 2 e 3 | 10 Minutos

Na questão 1, o professor deverá escrever no quadro a descrição respetiva à divisão dos termos da equação por 10.

Na questão 2, o professor deverá discutir com os alunos que o primeiro enunciado é traduzido pela expressão ‘10+5 = 55’ e que nele não existe nenhum valor por descobrir. Deverá também discutir que, no terceiro enunciado, é desconhecido o número de gomas que a Alice comprou e, igualmente, é desconhecido o número de gomas que o Marco lhe ofereceu, logo a expressão que traduz essa situação é ‘10x+10x = 55’. Chegados aqui, os alunos deverão ser convidados a explicar que ‘10x+5 = 55’ traduz corretamente o segundo enunciado porque os termos da equação adequam-se à situação descrita.

Na questão 3, o professor deverá explicitar no quadro que ‘x’ representa o número de gomas existentes em cada pacote, logo ‘x=5’ significará que cada pacote tem 5 gomas.

Discussão e síntese – Questões 4 e 5	10 Minutos

Previsivelmente a discussão da questão 4 deverá ocorrer de forma célere, e nela, o professor deverá selecionar um aluno por cada célula a preencher e questionar o que deve inserir na mesma. Em caso da inserção estar correta o professor questiona a turma se existem dúvidas, se as houver o aluno deverá explicar a sua opção aos colegas. No caso de existirem inserções que não conduzam à obtenção de uma equação mais simples, o professor pede a outro aluno que intervenha e reintroduz na célula adequada o novo valor, esse aluno deverá explicar ao anterior a sua opção.

Para resolver as equações da questão 5, o professor deverá selecionar previamente alunos que possam indicar resoluções corretas e, se for pertinente para a discussão, questionar outros alunos acerca de resoluções alternativas, aproveitando-se para verificar que ambas conduzem à mesma solução. Os alunos chamados a participar indicam ao professor que inserções deverá fazer no *Solver* e justificam as suas opções quando o professor achar pertinente, ou sempre que haja duvidas. No momento de síntese, o professor deverá incentivar, novamente, a verificação da solução da equação.

A discussão destas duas questões deve contar com a projeção da folha de cálculo do *Solver* que o professor estiver a trabalhar.

Aula 4 – 25 de fevereiro de 2016 – 45 minutos.

Objetivos:

- Resolver equações do 1.º grau;
- Aplicar os princípios de equivalência;
- Verificar a equivalência entre equações;
- Verificar a solução de equações;
- Determinar o significado de incógnita e de termos da equação no contexto da tarefa;
- Traduzir problemas algebricamente.

Pré-requisitos:

- Operações;
- Noção de incógnita;
- Noção de equação, de membro da equação, de termo da equação, de solução da equação e de equação equivalente.

Tarefa: Guloseimas para a Páscoa.

Desenvolvimento da aula

Entrada dos alunos e introdução da tarefa	10 Minutos

Após os alunos se sentarem e serem dados os bons dias, o professor indica que terão 25 minutos para resolver a tarefa, à qual se seguirá uma discussão em grupo.

Trabalho autónomo	25 Minutos

Na questão 1 pretende-se que os alunos identifiquem qual de três equações traduz o problema enunciado, que descrevam o que significa cada termo dessa equação e a incógnita respetiva. É esperado que parte significativa dos alunos sintam dificuldades relacionadas com a noção de incógnita, ou seja, haverá alunos que continuarão a identificar a incógnita como uma abreviatura e, neste caso, designarão a incógnita 'g' como gomas em vez de número de gomas por embalagem. Para ajudar os alunos a superar esta dificuldade, o professor deverá incentivar o estabelecimento de conexões com o trabalho desenvolvido em aulas anteriores reforçando, novamente com questões, que a incógnita representa um valor que desconhecemos.

Na questão 2, os alunos deverão identificar, no contexto do problema, o significado da incógnita ‘p’ e identificar quais das equações enunciadas é equivalente à equação ‘7+p = 5+2p’. Para os alunos que já tiverem interagido com o professor na questão 1, será mais fácil identificar o significado da incógnita ‘p’ porém, em geral, os alunos continuarão a ter dificuldades em identificar corretamente que ‘p’ representa o número, desconhecido, de pacotes de lacasitos comidos pela Alice. Novamente aqui, o professor deve aproveitar para estimular, com questões, a compreensão dos alunos relativamente à noção de incógnita. Na identificação das equações equivalentes os alunos, previsivelmente, revelarão dificuldades relacionadas com a transposição incorreta de termos, ou com a adição de termos não semelhantes. Nesta fase, o professor questionará os alunos relativamente à operação que escolheriam, se estivessem a trabalhar no *Solver*, para obter a equação equivalente respetiva e questionará se, no *Solver*, a equação que resultaria dessa operação seria, ou não, efetivamente a equação que selecionaram como equivalente.

Na questão 3 os alunos deverão resolver duas equações aplicando as regras baseadas nos princípios de equivalência. É previsível que apenas alguns alunos consigam ter tempo de iniciar a resolução desta questão. As dificuldades previstas são a tentativa de subtrair coeficientes numéricos aos termos com incógnita, a transposição incorreta de termos e a adição de termos não semelhantes. O recurso às conexões com o trabalho desenvolvido no *Solver* será a estratégia que o professor deverá privilegiar, isto em termos do redirecionar dos raciocínios dos alunos que sintam dificuldades ou bloqueios.

Discussão e síntese	10 Minutos

Na questão 1, auxiliado pela projeção no quadro da tarefa, o professor pede a um aluno que explique por que motivo a primeira equação não traduz o problema e pede a outro que explique qual o motivo pelo qual a segunda equação também não pode traduzir o problema. Seguidamente, o professor deve pedir a um aluno, que habitualmente tenha um pouco mais dificuldade, para capitalizar as explicações dos colegas explicando por que motivo a terceira equação traduz corretamente o problema. Será também este aluno a tentar identificar o que significa cada termo da equação e a incógnita respetiva.

Na questão 2, o professor escreve no quadro que a incógnita ‘p’ significa pacotes de lácasitos e pede aos alunos que corrijam esta afirmação. Relativamente à seleção das equações que são equivalentes à equação ‘7+p = 10+2p’, o professor escolhe um aluno que justifique quais as equações que não são equivalentes à inicial e, a outro, que justifique quais as equações que o são. As referências ao *Solver* deverão ser aproveitadas pelo professor para dinamizar a discussão e devem ser feitas no quadro esquematizações das operações que justificam que as equações sejam, ou não, equivalentes à equação inicial.

Para a resolução das equações o professor seleciona dois alunos para irem ao quadro e solicita que indiquem, em anotações auxiliares, como transformaram uma equação noutra que lhe é equivalente.

Aula 5 – 01 de março de 2016 – 90 minutos.

Conteúdos: Expressões algébricas.

Objetivos:

- Resolver equações do 1.º grau;
- Aplicar os princípios de equivalência;
- Verificar a solução de equações;
- Determinar o significado da solução da equação no contexto da tarefa;
- Traduzir problemas algebricamente;
- Classificar equações.

Pré-requisitos:

- Operações;
- Noção de incógnita;
- Noção de equação, de membro da equação, de termo da equação e de solução da equação.

Tarefa: Equações I.

Desenvolvimento da aula

Entrada dos alunos e introdução da tarefa	15 Minutos

Após os alunos se sentarem junto aos computadores e serem dados os bons dias, o professor lê a primeira questão da tarefa e esclarece alguma dúvida relativa ao que é pedido. Será dito aos alunos que devem resolver as três questões da tarefa com a ajuda do ***Solver*** e será escrito, no quadro, o tempo que devem dedicar a cada questão: 30 minutos à questão 1, 10 minutos à questão 2 e 10 minutos à questão 3.

Trabalho autónomo – Questão 1	30 Minutos

Na questão 1, alínea a), os alunos deverão associar cada enunciado da tarefa uma das três equações que constam no *Solver*, as equações deverão ser escritas na folha da tarefa nos espaços respetivos, isto para auxiliar a análise crítica dos alunos. É expectável que os alunos continuem a sentir dificuldades na representação algébrica de situações, porém, o facto de haver três hipóteses de equações para três enunciados, ajudará os alunos a repensar as escolhas iniciais, isto para que as três associações façam sentido. Na interação com os alunos o professor não deverá fornecer muitas pistas, os alunos deverão ser antes incentivados a ler atentamente os enunciados e a analisar criticamente as equações que associaram a cada um.

Na questão 1, alínea b), é pretendido que os alunos resolvam as três equações da alínea anterior. São esperadas dificuldades semelhantes às detetadas nas aulas anteriores, como a tentativa de subtrair o coeficiente de ‘x’ ao monómio que o contém. Havendo bloqueios dos alunos relativo à resolução das equações, o professor deverá sugerir aos alunos o exemplo das balanças, questionar o que se pode “retirar a cada prato” e qual a melhor opção a tomar para isolar a incógnita.

Na questão 1, alínea c), deverá ser descrito o que significa cada uma das soluções encontradas. É previsível que os alunos sintam maior dificuldade em identificar o que é a solução da equação. O professor deve questionar os alunos sobre qual o valor de ‘x’ que encontraram na resolução da equação, deve sublinhar que esse valor é a solução da equação e deve questionar o que representa esse valor no contexto do problema. Previsivelmente alguns alunos responderão que esse valor representa ‘x’ ou a incógnita e, neste caso, o professor deverá questionar o que significa então a incógnita no contexto do problema respetivo.

Trabalho autónomo – Questões 2 e 3	20 Minutos

Na questão 2, os alunos deverão resolver duas equações no *Solver* e indicar a solução de cada uma delas. Além das dificuldades habituais na resolução de equações, os alunos serão confrontados com uma equação impossível e com uma equação possível e indeterminada o que, nesta fase, não lhes fará muito sentido. Acompanhando o trabalho dos alunos de perto, o professor deverá estar especialmente atento aos casos em que os alunos chegam a expressões como ‘0 = -4’ ou ‘x = x’. Nestas situações, o professor deve incentivar a confiança dos alunos relativamente aos procedimentos que efetuaram e, aproveitando o momento, lança questões como: “quando é que zero é igual a menos quatro?” ou “quando é que um valor x é igual a um valor x”. Desta forma, informalmente, começarão a ser criadas nos alunos as ideias de equação impossível e de equação possível mas indeterminada.

Na questão 3 é pretendido que os alunos verifiquem qual das cinco equações existentes na folha de cálculo 6 têm solução 2. Previsivelmente, os alunos ainda não terão consolidado suficientemente o procedimento de verificação da solução das equações, o que constituirá um obstáculo à resolução desta questão. Nestes casos, o professor deverá pedir aos alunos que consultem as equações já resolvidas e que indiquem as suas soluções, seguidamente pergunta aos alunos qual o procedimento que devem utilizar para ter a certeza de que a solução da equação está correta. Efetuado este redireccionamento de raciocínios, o professor pede aos alunos que regressem à questão 3.

Discussão e síntese – Questão 1	15 Minutos

Na discussão da questão 1, alínea a), o professor seleciona um aluno com boa capacidade de expressão para explicar à turma qual foi a sua escolha. Havendo dúvidas ou discordâncias, o professor deve promover a argumentação entre os alunos.

Na discussão da questão 1, alínea b), o professor escreve no quadro as equações em questão e escreve qual a solução de cada uma delas. Este momento será concretizado com a participação de alunos selecionados pelo professor, será pertinente, em termos de síntese, aproveitar esta fase para incentivar a verificação das soluções encontradas.

Na discussão da questão 1, alínea c), o professor deverá continuar a fomentar a participação dos alunos e escrever no quadro o significado das soluções encontradas.

Discussão e síntese – Questões 2 e 3	10 Minutos

Na discussão da questão 2, o professor seleciona um aluno que tenha ganho, no momento de trabalho autónomo, uma ideia de impossibilidade que possa ser satisfatoriamente transmitida aos colegas. A expressão final a que este aluno chegou deverá ser escrita no quadro e questionam-se os alunos sobre qual o valor de ‘x’ que pode dar sentido à igualdade inicial. Após proceder de forma análoga na discussão da equação possível e indeterminada, o professor explica e sintetiza que as equações classificam-se como possíveis e determinadas, possíveis e indeterminadas ou como impossíveis. Isto mesmo deverá ser escrito no quadro para que os alunos o escrevam na folha da tarefa ou no caderno.

Aula 6 – 03 de março de 2016 – 45 minutos.

Conteúdos: Expressões algébricas.

Objetivos:

- Resolver equações do 1.º grau;
- Aplicar os princípios de equivalência;
- Verificar a solução de equações;
- Determinar o significado da incógnita, dos termos e da solução da equação no contexto da tarefa;
- Traduzir problemas algebricamente.

Pré-requisitos:

- Operações;
- Noção de incógnita;
- Noção de equivalência;
- Noção de equação, de membro da equação, de termo da equação e de solução da equação.

Tarefa: Mestres e guloseimas.

Desenvolvimento da aula

Entrada dos alunos e introdução da tarefa	15 Minutos

Depois de os alunos se sentarem e serem cumprimentados pelo professor, é anunciado que irão voltar a contar com a presença do mestre chocolateiro e que deverão resolver as duas primeiras questões da tarefa nos 20 minutos seguintes.

Trabalho autónomo	20 Minutos

Na questão 1 é recuperado o trabalho realizado na questão 3 da tarefa Férias de Carnaval. Pretende-se que os alunos classifiquem o valor lógico de cinco afirmações, para tal devem identificar o significado da incógnita no contexto do problema e perceber que alterações foram, ou podem ser, efetuadas ao conteúdo dos pratos de balança que preservam a situação de equilíbrio que se verificava inicialmente. Previsivelmente, os alunos continuaram a manifestar dificuldade em identificar o significado da incógnita e, novamente, o professor deve reforçar que as incógnitas representam valores que queremos descobrir. É igualmente expectável que os alunos, na alínea d), considerem que a afirmação é verdadeira, esta imprecisão deve ser registada pelo professor e lançada no momento de discussão, isto para que se esclareça que o que se obtém é uma situação equivalente à da 2ª balança e não igual.

Na questão 2, os alunos deverão identificar, á semelhança do que aconteceu na questão 1 da tarefa Guloseimas para a Páscoa, qual das três equações traduz corretamente o enunciado, o que representa cada termo e a incógnita dessa equação no contexto da tarefa e que, por fim, resolvam a equação e indiquem o significado da solução encontrada. É esperado que volte a surgir a dificuldade associada à utilização da incógnita como abreviatura, devendo o professor ajudar os alunos com a noção correta de incógnita. Na resolução da equação são igualmente esperadas dificuldades, nomeadamente as relacionadas com a transposição incorreta de termos. O invocar dos procedimentos efetuados no *Solver,* na aula anterior, deverá ser uma das estratégias a utilizar pelo professor para auxiliar o trabalho dos alunos.

Discussão e síntese	10 Minutos

Na discussão da questão 1, o professor projeta no quadro as balanças do mestre chocolateiro e identifica, com os alunos, as transformações que ocorreram entre as quatro balanças. Esta clarificação será o mote para discutir o valor lógico das afirmações enunciadas na tarefa.

Na discussão da questão 2, também com o auxílio da projeção do enunciado da tarefa, o professor sublinha as palavras-chave do enunciado: “três caixas”, “9 bombons” e “30 bombons”, seguidamente é pedido aos alunos que traduzam para monómios cada um dos sublinhados e, desta forma, chegar-se-á à identificação da equação que traduz o problema e ao significado da incógnita no contexto. Para a resolução da equação, o professor seleciona um aluno para ir ao quadro escrever a sua resolução e discuti-la aos colegas. No final, o professor questiona os alunos acerca do procedimento a efetuar para se ter a certeza que a solução encontrada é a correta, isto para incentivar o procedimento de verificação das soluções das equações.

Aula 7 – 04 de março de 2016 – 90 minutos.

Conteúdos: Expressões algébricas.

Objetivos:

- Resolver equações do 1.º grau;
- Aplicar os princípios de equivalência;
- Verificar a equivalência entre equações;
- Verificar a solução de equações;
- Determinar o significado da incógnita, dos termos e da solução das equações no contexto da tarefa;
- Determinar o conjunto de solução das equações.

Pré-requisitos:

- Operações;
- Propriedade distributiva da multiplicação;
- Noção de equivalência;
- Noção e classificação de equações;

Tarefa: Mestres e guloseimas.

Desenvolvimento da aula

Entrada dos alunos e introdução da tarefa	15 Minutos

Após os alunos se sentarem e serem dados os bons dias, o professor indica que deverão resolver as questões 3, 4 e 5 da tarefa. Será escrito, no quadro, o tempo que devem dedicar a cada questão: 15 minutos para a questão 3, 15 minutos para a questão 4 e 20 minutos para a questão 5. No final da aula, o professor distribui aos alunos o TPC II para que estes o resolvam no fim-de-semana, preparando-se assim para o Mini-Teste de dia 08 de Fevereiro, data na qual deverão entregar as suas resoluções ao professor.

Trabalho autónomo – Questão 3	15 Minutos

O pretendido com a questão 3 da tarefa é a resolução da equação enunciada, a verificação da impossibilidade da afirmação da Alice e que seja justificado que as equações da alínea b) não são equivalentes à equação inicial. São esperadas dificuldades na resolução da equação, especialmente porque a equação é impossível e são esperadas, na alínea b), dificuldades relacionadas com a transposição incorreta de termos e com a adição de termos não semelhantes. O professor deverá verificar o trabalho desenvolvido pelos alunos e estar atento aos erros e bloqueios relativos à resolução das equações. Novamente, o professor deverá invocar o trabalho realizado no *Solver* em aulas anteriores, isto para focar a atenção dos alunos nas quatro operações disponíveis para resolver as equações do 1 grau. Esta estratégia será igualmente útil para que os alunos, por si, compreendam que não existe nenhuma operação que se possa realizar no *Solver*, que origine as equações da alínea b) a partir da equação inicial.

Trabalho autónomo – Questão 4	15 Minutos

Nesta questão os alunos deverão resolver cada uma das 4 equações e indicarem a solução respetiva de cada uma. Além das dificuldade habituais que os alunos sentem na resolução de equações terão ainda de lidar, há semelhança do ocorreu na questão 3, com a dificuldade adicional de resolver uma equação impossível e também uma equação indeterminada. É expectável que alguns alunos cheguem à solução das equações de modo mais informal, ou seja, tentando encontrar um valor de ‘x’ que dê sentido à igualdade, ou através da aplicação das operações inversas. O Professor deverá, como habitualmente, recorrer ao exemplo do *Solver* para focar a atenção dos alunos nas operações e, na resolução das equações indeterminadas ou impossíveis, deverá questionar os alunos sobre o valor, ou os valores, que dão sentido há igualdade, isto para que os alunos, por si, cheguem à conclusão que não existe nenhum valor que seja solução de uma equação impossível e que todos os valores de ‘x’ são solução de uma equação indeterminada.

Trabalho autónomo – Questão 5	20 Minutos

Na questão 5, os alunos deverão resolver três novas equações. Acrescem às dificuldades descritas para a questão 3, a dificuldade associada ao uso do parêntesis e, também, a dificuldade específica da segunda equação, isto porque a mesma tem solução não inteira, é expectável que os alunos ao chegarem a expressões do tipo ‘-12x = 4’ considerem que a equação é impossível. Além das estratégias descritas para auxiliar o trabalho dos alunos, o professor deverá conduzir os alunos a relembrarem a propriedade distributiva da multiplicação e, quando chegarem expressões como a referida, o professor deverá perguntar que operação efetuariam se estivessem a trabalhar no *Solver*, isto em ordem a isolar a incógnita. A máquina de calcular será um recurso a ter em conta para que os alunos verifiquem que, de facto, existe um número que multiplicado por ‘-12’ é igual a ‘4’.

Discussão e síntese	25 Minutos

Na discussão da questão 3, o professor escolhe um aluno para ir ao quadro resolver a equação e analisar criticamente a afirmação da Alice, gerando-se a partir daqui a discussão coletiva. O mesmo aluno deverá igualmente justificar se considera as equações da alínea b) equivalentes ou não à equação inicial. Na síntese desta questão, o professor deverá verificar com os alunos que não existe nenhum valor de ‘x’ que dê sentido à expressão da alínea a). Relativamente à alínea b) deve reforçar que a transposição incorreta de termos não produz uma equação equivalente à anterior, será útil recorrer ao exemplo das balanças para ilustrar esta situação. Deverá igualmente ser sintetizado que é incorreto adicionar termos não semelhantes, como ilustração metafórica o professor poderá recorrer ao exemplo dos “gursos”.

Na discussão da questão 4, o professor escolhe quatro alunos, um por equação, para irem ao quadro escrever as suas resoluções. A discussão será gerada a partir das incorreções dessas resoluções ou das dúvidas que as mesmas suscitem. Na síntese, o professor deverá garantir que são escritas as soluções de cada equação, aproveitando também o momento para fazer a verificação das soluções e para classificar as equações, isto com o contributo dos alunos.

Na discussão da questão 5, o professor irá escolher outros três alunos e deverá dinamizar a discussão de forma semelhante ao que aconteceu na questão 4. Deverá ser mencionado pelo professor a existência de conjuntos que contém as soluções das equações, isto aproveitando as equações em questão para discutir com os alunos qual o “conteúdo” de cada conjunto solução das equações resolvidas. Na síntese o professor escreve no quadro os conjuntos solução de cada equação.

Aula 8 – 08 de março de 2016 – 90 minutos.

Conteúdos: Expressões algébricas.

Objetivos:

- Resolver equações do 1.º grau;
- Aplicar os princípios de equivalência;
- Verificar a solução de equações;
- Traduzir problemas algebricamente.

Pré-requisitos:

- Operações;
- Noção e classificação de equações;

Tarefa: Equações II.

Desenvolvimento da aula

Entrada dos alunos e introdução da tarefa	15 Minutos

Após os alunos estarem prontos para iniciar os trabalhos com o ***Solver***, o professor cumprimenta-os e indica que irão resolver a tarefa até às 9 horas, iniciando-se depois a discussão coletiva e, às 9:20, irão começar a resolver o Mini-Teste.

Trabalho autónomo	30 Minutos

Na questão 1 da tarefa, os alunos deverão resolver as quatro equações e proceder à sua classificação. São esperadas as dificuldades habituais verificadas na resolução de equações, especialmente nas não determinadas, devendo o professor escutar atentamente os alunos e observar as suas produções, isto para os ajudar a superar bloqueios e a estabelecer conexões com o trabalho realizado nas aulas anteriores.

Na questão 2, os alunos terão de escrever uma situação que possa ser traduzida pela equação ‘9x-12 = 12+3x’. É expectável que os alunos sintam bastante dificuldade na elaboração de um enunciado que possa ser traduzido pela equação. Em termos de redireccionamento de raciocínios, o professor deverá começar por sugerir aos alunos em dificuldades que verifiquem o significado da incógnita ‘x’ que é indicado na tarefa, seguidamente, e tendo em conta o significado que é atribuído à incógnita, o professor deverá perguntar o que poderão então significar os monómios

‘9x’ e ‘3x’, depois o professor afasta-se e deixa que os alunos explorem a restante contextualização da equação.

Na questão 3 os alunos terão de verificar se alguma ou algumas das equações da questão 5 têm solução 2. É esperado que alguns alunos não façam a verificação da solução indicada e optem por tentar resolver as equações, nestes casos o professor deverá perguntar aos alunos se, nas aulas anteriores, trabalhou-se uma forma mais simples de verificar se um valor é ou não solução de uma equação.

Discussão e síntese	20 Minutos

Uma vez que nesta aula não poderão ocorrer desvios de tempo por causa da realização do Mini-Teste, a discussão e síntese serão um pouco mais dirigidas pelo professor.

Na discussão da questão 1, o professor resolve no quadro as quatro equações e questiona os alunos se existe alguma dúvida. Depois, o professor pede sucessivamente a quatro alunos que ajudem a classificar as equações resolvidas, gerando-se aqui a discussão necessária a eliminar conceções erróneas que ainda persistam.

Na discussão da questão 2, o professor escreve o significado contextual da incógnita ‘x’ que é indicado na tarefa, escrevendo no quadro que ‘x’ representa o número de bolos que o mestre chocolateiro faz num dia. Seguidamente pergunta aos alunos o que significa ‘9x’ e o que significa ‘3x’. Por fim, será sintetizado que os bolos fabricados pelo mestre chocolateiro em 9 dias menos 12 bolos que caiam ao chão, são tantos bolos como 12 bolos que sejam encomendados a outra pastelaria mais os bolos fabricados pelo mestre chocolateiro em 3 dias.

Na discussão da questão 3, o professor escreve no quadro a verificação relativa à solução 2 da primeira equação. Seguidamente, vai escolhendo alunos que o ajudem a verificar se 2 é ou não solução das restantes quatro equações.

Mini-Teste	25 Minutos